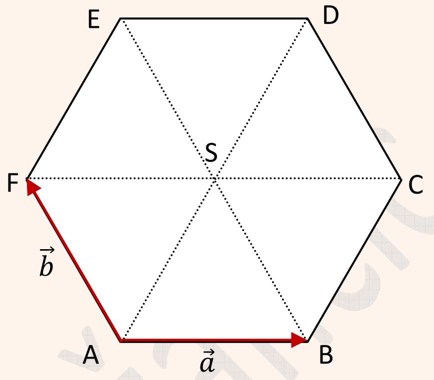
# Priprema za ispit znanja – Vektori

1. Dan je pravilni šesterokut ABCDEF. Ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{a},\ \overrightarrow{AF} = \vec{b}$ izrazi pomoću $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ vektore $\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{BD}\ i\ \overrightarrow{BE}$ .

$$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DC}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{CE} = -\vec{a} + \vec{b}}$$




$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SE} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FS} - \overrightarrow{SE}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{EF} = -\vec{a} - \vec{b}}$$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{EB}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{BE} = 2\vec{b}}$$

2. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo je središte. Odredi vektore:

a) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{SB}$ b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}$ c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{SC}$ d) $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CD}$
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}$ f) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED}$ g) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CF}$ h) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$

$a)\ \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{SB} = \boldsymbol{\overrightarrow{DE}} + \boldsymbol{\overrightarrow{ES}} = \overrightarrow{DS}$

$b)\ \boldsymbol{\overrightarrow{AS}} + \boldsymbol{\overrightarrow{SC}} = \overrightarrow{AC}$

$c)\ \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{SC} = \boldsymbol{\overrightarrow{BE}} + \boldsymbol{\overrightarrow{ED}} = \overrightarrow{BD}$

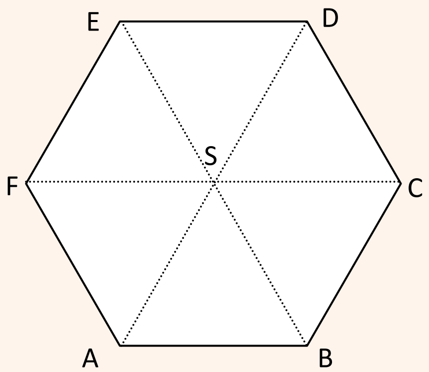
$d)\ \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{\overrightarrow{BS}} + \boldsymbol{\overrightarrow{SE}} = \overrightarrow{BE}$

$e)\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} = \boldsymbol{\overrightarrow{FS}} + \boldsymbol{\overrightarrow{SC}} = \overrightarrow{FC}$

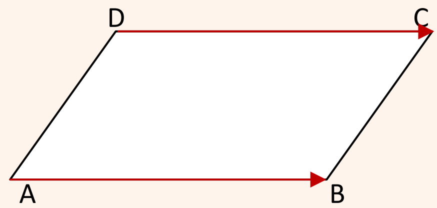
$f)\ \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} = \boldsymbol{\overrightarrow{AF}} + \boldsymbol{\overrightarrow{FS}} = \overrightarrow{AS}$

$g)\ \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CF} = \boldsymbol{\overrightarrow{BC}} + \boldsymbol{\overrightarrow{CF}} = \overrightarrow{BF}$

$h)\ \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} = \boldsymbol{\overrightarrow{CB}} + \boldsymbol{\overrightarrow{BS}} = \overrightarrow{CS}$



3. Točke D(1,-2), A(3, 2) i B(5, 1) uzastopni su vrhovi paralelograma ABCD. Kolika je duljina dijagonale $\overrightarrow{AC}$?




Najprije treba odrediti vrh C koji nedostaje.
Nakon toga treba odrediti vektor $\overrightarrow{AC}$ te primjenom formule za duljinu vektora izračunati traženi podatak.
Točku C određujemo iz činjenice da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ jednaki:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$$

$$(\boldsymbol{x_B - x_A})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_B - y_A})\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (\boldsymbol{x_C - x_D})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_C - y_D})\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Nakon uvrštavanja poznatih koordinata gornja jednadžba poprima oblik:

$$\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{1}\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (\boldsymbol{x_C} - \mathbf{1})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_C} + \mathbf{2})\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Primjenom pravila o jednakosti vektora gornja jednadžba se rastavi na dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_C} - \mathbf{1} = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{y_C} + \mathbf{2} = -\mathbf{1} \end{cases}$$

Iz čega dobijemo koordinate točke C(3, -3) te kreiramo vektor $\overrightarrow{AC} = (3-3)\vec{\imath} + (-3-2)\vec{\jmath}$= -5$\vec{\jmath}$.

Formulom za duljinu vektora lagano dobijemo da je $|\overrightarrow{AC}| = 5$.

4. Dane su točke A(-1, 2), B(5, -2), C(1, 3) i D(0, 0). Vektor $\overrightarrow{AB}$ prikaži kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}\ i\ \overrightarrow{AD}$.

Najprije treba kreirati sva tri vektora:

$\overrightarrow{AB} = (\boldsymbol{x_B - x_A})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_B - y_A})\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (5+1)\vec{\imath} + (-2-2)\vec{\jmath} = \mathbf{6}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{4}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$

$\overrightarrow{AC} = (\boldsymbol{x_C - x_A})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_C - y_A})\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (1+1)\vec{\imath} + (3-2)\vec{\jmath} = \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{1}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$

$\overrightarrow{AD} = (\boldsymbol{x_D - x_A})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y_D - y_A})\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (0+1)\vec{\imath} + (0-2)\vec{\jmath} = \mathbf{1}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$

Po definiciji linearne kombinacije prikazati vektor $\overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}\ i\ \overrightarrow{AD}$ znači pronaći skalare (realne brojeve) α i β takve da je:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}$$

Zamijenimo vektore njihovim prikazom u kanonskoj bazi $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = \alpha \cdot (2\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}) + \beta \cdot (1\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$$

$$6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = 2\alpha\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} + \beta\vec{\imath} - 2\beta\vec{\jmath}$$

$$6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = (2\alpha + \beta)\vec{\imath} + (\alpha - 2\beta)\vec{\jmath}$$

Nakon razmnožavanja i grupiranja primijenimo definiciju jednakosti dvaju vektora te od jedne vektorske jednadžbe (sa *„strelicama“)*

$$6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = (2\alpha + \beta)\vec{\imath} + (\alpha - 2\beta)\vec{\jmath}$$

kreirajmo dvije skalarne jednadžbe (*„bez strelica“):*

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 6 \\ \alpha - 2\beta = -4 \end{cases}$$

Rješavanjem ovoga sustava jednadžbi (1. jednadžbu pomnožite s 2 te onda zbrojite obje jednadžbe ) dobijemo $\alpha = \frac{8}{5}, \beta = \frac{14}{5}$ te možemo napisati traženu linearnu kombinaciju:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{8}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{14}{5} \cdot \overrightarrow{AD}$$

5. Odredi vektor $\vec{a}$ suprotnog smjera od vektora $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ a duljine $3\sqrt{5}$.

Najprije kreiramo jedinični vektor $\vec{b}_0$ u smjeru vektora $\vec{b}$ tako da vektor $\vec{b}$ podijelimo s njegovom duljinom:

$$\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{0}} = \frac{\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{b}}|}$$

Zato ćemo izračunati duljinu vektora $\vec{b} = \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Te kreirati vektor $\vec{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{0}} = \frac{-2\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$.

Da bi od ovog vektora, koji je kolinearan s vektorom $\vec{b}$ dobili vektor duljine $3\sqrt{5}$ treba ga pomnožiti s $3\sqrt{5}$ a da bi bio suprotne orijentacije treba ga pomnožiti s -1. Dakle, traženi vektor dobijemo množenjem s $-3\sqrt{5}$ vektora $\frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$:

$$-3\sqrt{5} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\right) = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$$

6. Odredi vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ a duljine $3\sqrt{10}$.

Postupamo kao i u 5. Zadatku:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{10}}$$

Sada pomnožimo vektor $\vec{a}_0$ (koji je ostao kolinearan s vektorom $\vec{a}$) s $3\sqrt{10}$ kako bi dobili vektor duljine $3\sqrt{10}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$:

$$3\sqrt{10} \cdot \left(\frac{3\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{10}}\right) = 9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$$

Primijetite da zadatak ima dva rješenja jer smo mogli množiti (i trebali ako želimo dobiti puni broj bodova za ovaj zadatak ) i s -$3\sqrt{10}$ (duljina je $3\sqrt{10}$ samo je orijentacija suprotna).

7. Odredi vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ koji zadovoljava uvjet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$.

Neka je traženi vektor $\vec{b} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Na taj način smo problem sveli na traženje dviju nepoznanica x i y. U tome ćemo uspjeti ako iz podataka koji su nam zadani uspijemo napisati dvije jednadžbe s nepoznanicama x i y. Dakle, gdje se u ovome zadatku kriju te dvije jednadžbe?

Jedna jednadžba je očita ($\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$) a druga je „sakrivena“ u uvjetu kolinearnosti.

Naime, vrijedi jedna važna, a jednostavna činjenica za vektore u Kartezijevom koordinatnom sustavu:

Vektori

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} \quad \text{i} \quad \vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath}$$

su kolinearni ako su im komponente proporcionalne, t.j. ako je

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$$

Imajući to u vidu kreirajmo dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} \vec{a} \ \ i \ \ \vec{b} \ kolinearni \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -26 \end{cases}$$

Napišimo te jednadžbe pomoću komponenti vektora:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = \dfrac{-3}{y} \\ 2x - 3y = -26 \end{cases}$$

Unakrsnim množenjem i prebacivanjem nepoznanica na lijevu stranu sredimo prvu jednadžbu:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = -26 \end{cases}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobijemo x = -4, y = 6 pa je traženi vektor $\vec{b} = -4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$.

8. Odredi realni broj *a* tako da vektori $\vec{u} = (a+1)\vec{i} - (a-1)\vec{j}$ i $\vec{v} = -a\vec{i} + 3a\vec{j}$ budu kolinearni.

Iskoristimo činjenicu istaknutu u 7. Zadatku da su koordinate kolinearnih vektora proporcionalne i primijenimo to na vektore $\vec{u}$ $i$ $\vec{v}$:

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+1}{-a} = \frac{-(a-1)}{3a}$$

Unakrsnim množenjem nastaje jednadžba:

$$3a^2 + 3a = a^2 - a$$

koja nakon sređivanja glasi:

$$2a^2 + 4a = 0$$

a čija su rješenja $a_1 = 0$, $a_2 = -2$.

9. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}, \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Odredi vektor $\vec{v}$ kolinearan sa $\vec{c}$ duljine jednake duljini vektora $\vec{a} + \vec{b}$.

Neka je traženi vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Trebaju nam dvije jednadžbe s nepoznanicama x i y kako bi odredili vektor v:

$$\begin{cases} \vec{v} \ \ i \ \ \vec{c} \ \ kolinearni \\ |\vec{v}| = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$$

Sada ih treba „prevesti“ na „jezik“ x,y:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \end{cases}$$

Naravno, prethodno smo izračunali vektor $\vec{a} + \vec{b} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{i} + \vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ jer nam je bio neophodan za kreiranje druge jednadžbe.

Unakrsnim množenjem i izlučivanjem x-a iz prve jednadžbe te kvadriranjem i sređivanjem druge nejednadžbe dobijemo:

$$\begin{cases} x = -2y \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Sada slijedi „spajanje“ jednadžbi u jednu s JEDNOM nepoznanicom i njeno rješavanje:

$$(-2y)^2 + y^2 = 20$$

$$5y^2 = 20$$

$$y^2 = 4$$

Pa dobijemo: $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ a onda i $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$. Rješenja su dakle dva vektora $\begin{cases} \vec{v}_1 = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ \vec{v}_2 = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \end{cases}$

10. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ i $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Odredi vektor $\vec{c}$ za kojega je $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ te $\vec{b} \cdot \vec{c} = -5$.

Neka je traženi vektor $\vec{c} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Jasno se vide i dvije jednadžbe koje bi nam trebale omogućiti računanje nepoznanica x i y a samim time i određivanje vektora $\vec{c}$ :

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = -5 \end{cases}$$

Primjenom formule za skalarni umnožak, nejednadžbe „prevodimo“ iz vektorskog oblika u skalarni oblik:

$$\begin{cases} -2x + 1y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

Množenjem 1. jednadžbe s 2 i zbrajanjem s drugom jednadžbom izračunamo da je x = -1. Ako to uvrstimo u 1. jednadžbu, lagano se izračuna da je y = 1.

Traženi vektor $\vec{c}$ glasi: $\vec{c} = -1\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$.

11. Koliki kut zatvaraju vektori $\vec{a} + \vec{b}$ $i$ $\vec{a} - \vec{b}$, ako je $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$?

Prisjetimo se:

Ako su $\vec{u}$ $i$ $\vec{v}$ dva vektora u koordinatnom sustavu onda se kut između tih vektora računa formulom:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Neka je $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{\imath} - \vec{\jmath} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} == -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - (\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

Uz malo *„igranja“* s kalkulatorom dobijemo $\varphi = 10^0\ 11'\ 18''$

12. Za koje su vrijednosti realnog parametra *m* vektori $\vec{p} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ i $\vec{q} = m\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ okomiti?

**Uvjet okomitosti** dvaju vektora kaže:

**„Dva vektora su okomita ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli“**.

Stoga vektori $\vec{p}$ $i$ $\vec{q}$ moraju zadovoljavati uvjet $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.
Prevedeno na *„jezik komponenti“* ta jednadžba glasi:

$$3 \cdot m + 4 \cdot 2 = 0$$

pa lagano izračunamo da je m = $\frac{-8}{3}$

13. Odredi jedinični vektor okomit na $\overrightarrow{AB}$ , A(-1, 2), B(3, -1).

Najprije odredimo vektor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} = \boldsymbol{4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}$$

Sada se potraga za vektorom (nazovimo ga $\vec{v}$ )svodi na traženje dviju jednadžbi jer ćemo vektor kojeg tražimo zapisati pomoću baze $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Jednadžbe se kriju unutar riječi ***jedinični*** i ***okomit***:

$$\begin{cases} |\vec{v}| = 1 \ (jedinični) \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \ (uvjet\ okomitosti) \end{cases}$$

Prevedimo to u skalarni oblik („bez strelica“):

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 4 \cdot x - 3 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Prvu jednadžbu ćemo kvadrirati, a iz druge jednadžbe izlučiti jednu nepoznanicu (npr. x) te uvrstiti u prvu:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{4}y\right)^2 + y^2 = 1$$

Rješenja sustava su:

$\begin{cases} y_1 = 4/5 \\ y_2 = -4/5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 3/5 \\ x_2 = -3/5 \end{cases}$ pa imamo dva vektora: $\begin{cases} \vec{v}_1 = 3/5 \cdot \vec{\imath} + 4/5 \cdot \vec{\jmath} \\ \vec{v}_1 = -3/5 \cdot \vec{\imath} - 4/5 \cdot \vec{\jmath} \end{cases}$

14. Odredi vektor $\vec{b}$ duljine $4\sqrt{5}$, okomit na vektor $\vec{a} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Vektor $\vec{b}$ „potražimo“ u obliku $\vec{b} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Moramo napisati dvije jednadžbe s nepoznanicama x i y. Prvu će nam omogućiti „informacija“ da je duljina vektora $\vec{b}$ $4\sqrt{5}$, a drugu jednadžbu će nam „dati“ okomitost:

$$\begin{cases} |\vec{b}| = 4\sqrt{5} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \ (okomitost) \end{cases}$$

Sada vektorske jednadžbe treba napisati u skalarnom (nevektorskom obliku ):

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{5} \\ -2x + 1y = 0 \end{cases}$$

Prvu jednadžbu kvadriramo, a iz druge izlučimo y i uvrstimo u prvu:

$$x^2 + (2x)^2 = 80$$

Lagano se vidi da je $x^2 = 16$ odnosno $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $y_1 = 8$ a $y_2 = -8$. Stoga zadatak ima dva rješenja:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} \\ \vec{b}_2 = -4\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} \end{cases}$$

15. Ako je $\overrightarrow{AB} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

Ako je trokut pravokutan, tada su vektori čiji je početak u vrhu pravog kuta međusobno okomiti – no to znači da je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Dakle treba provjeriti je li jedan od umnožaka:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ A) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ B) \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ C) \end{cases}$$

jednak nuli. Izračunajmo najprije umnožak $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20 \neq 0 \ \ (nisu\ okomiti)$$

Za računanje ostalih umnožaka trebamo najprije izračunati vektore koji nedostaju:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 0 \ (vektori\ su\ OKOMITI)$$

Dakle, trokut ABC je pravokutan trokut s pravim kutom uz vrh B. Da nismo dobili umnožak 0, izračunali bi vektore $\overrightarrow{CA}$ $i$ $\overrightarrow{CB}$ te računali njihov skalarni umnožak.

16. Odredi nepoznatu koordinatu vrha C trokuta ABC, A(-2, 1), B(4, -2), C(-1, y), tako da trokut bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

Zadatak je sličan prošlom, s tim da ovdje znamo gdje treba biti pravi kut (to je vrh A). Stoga moramo postići da skalarni umnožak vektora s početkom u vrhu A bude jednak nuli. To ćemo postići tako da najprije kreiramo vektore $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$ a zatim riješimo jednadžbu (zahtjev) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} = \boldsymbol{6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC}} = (x_C - x_A)\vec{\imath} + (y_C - y_A)\vec{\jmath} = \boldsymbol{1\vec{\imath} + (y - 1)\vec{\jmath}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$
$$6 \cdot 1 - 3 \cdot (\boldsymbol{y - 1}) = 0$$

iz čega jednostavno izračunamo y = 3. Dakle koordinata vrha C je C(-1, 3).

17. Dokaži, koristeći se skalarnim umnoškom, da je trokut ABC, A(-3, -4), B(1, -6), C(3, 8) pravokutan.

Postupak je sličan onom provedenom u 15. zadatku, pa ponovimo još jednom:

Ako je trokut pravokutan, tada su vektori čiji je početak u vrhu pravog kuta međusobno okomiti – no to znači da je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Dakle treba provjeriti je li jedan od umnožaka:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ A) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ B) \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} & (vektori\ s\ početkom\ u\ vrhu\ C) \end{cases}$$

Sada preostaje izraziti sve te vektore i računati njihove umnoške:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{\imath} + (y_C - y_A)\vec{\jmath} = 6\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 0\ (OKOMITI\ SU)$$

Imali smo sreće jer već prvi par vektora okomit pa je trokut pravokutan s pravim kutom uz vrh A. Da nismo dobili umnožak nula nastavili bi ispitivanje okomitosti na par vektora $\overrightarrow{BA}\ i\ \overrightarrow{BC}$ a po potrebi i na par vektora $\overrightarrow{CA}\ i\ \overrightarrow{CB}$.

18. Odredi veličinu najvećeg kuta trokuta ABC, ako je A(-1, 2), B(1, -1), C(6, 1).

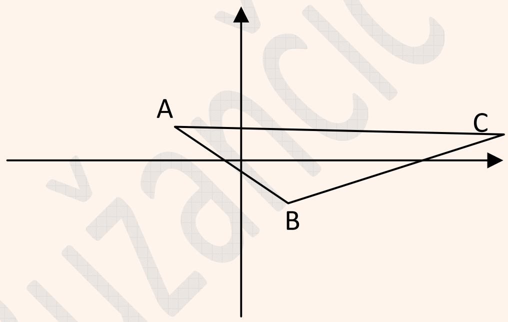
Zadatak se rješava tako da se formulom za kosinus kuta :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Izračunaju sva tri kuta trokuta te odabere onaj najveći. Postupak je moguće skratiti ako najprije u koordinatnom sustavu nacrtate trokut ABC te tako vidite uz koji bi se vrh mogao nalaziti najveći kut i onda računate samo njega.

Iz skice je vidljivo da je najveći kut uz vrh B pa ćemo ga izračunati primjenom formule:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$




Izračunajmo najprije vektore $\overrightarrow{BA}\ i\ \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = (x_A - x_B)\vec{\imath} + (y_A - y_B)\vec{\jmath} = -2\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = (x_C - x_B)\vec{\imath} + (y_C - y_B)\vec{\jmath} = 5\vec{\boldsymbol{\imath}} + 2\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Primijenimo sada formulu za kosinus kuta između tih vektora:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-2\cdot5+3\cdot2}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}$$

Uz upotrebu kalkulatora izračunamo kut $\beta = 101°\,53'\,19''$ (po tome što je veći od 90$^0$ možemo biti sigurni da smo stvarno izračunali najveći kut trokuta).

19. Dane su točke A(4, -3) i B(1, 6). Odredi na osi apscisa točku T tako da kut $\sphericalangle ATB$ bude pravi.

U stvari se radi o trokutu s vrhovima A, B i T i „želji“ da taj trokut bude pravokutan s pravim kutom uz vrh T (vrh je uvijek u sredini - $\sphericalangle ATB$ u sredini ima vrh T)

No, to znači da su vektori $\overrightarrow{TA}\ i\ \overrightarrow{TB}$ međusobno okomiti a zbog uvjeta okomitosti dvaju vektora zaključujemo da umnožak $\overrightarrow{TA}\ \cdot\overrightarrow{TB}$ mora biti nula.

U izračunavanju vektora $\overrightarrow{TA}\ i\ \overrightarrow{TB}$ iskoristit ćemo činjenicu da se točka T nalazi na osi apscisa (os x) pa je y koordinata te točke jednaka 0. Stoga točka T ima koordinate T(x, 0):

$$\overrightarrow{\boldsymbol{TA}} = (x_A - x_T)\vec{\imath} + (y_A - y_T)\vec{\jmath} = (\boldsymbol{4} - \boldsymbol{x})\vec{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{TB}} = (x_B - x_T)\vec{\imath} + (y_B - y_T)\vec{\jmath} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{6}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Postavimo uvjet okomitosti:

$$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 0$$

i raspišimo ga u skalarnom obliku:

$$(4 - x) \cdot (1 - x) - 3 \cdot 6 = 0$$

Razmnožavanjem i sređivanjem nastaje kvadratna jednadžba $\boldsymbol{x^2 - 5x - 14 = 0}$ čija su rješenja $\boldsymbol{x_1 = 7}$, $\boldsymbol{x_2 = -2}$ pa zadatak ima dva rješenja – točke **$T_1$ (7, 0) i $T_2$ (-2, 0).**

20. Kolika je duljina vektora $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, te $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$?

U zadacima u kojima se računa duljina vektora koji nije zapisan u $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ bazi valja voditi računa da je bolje računati **kvadrat duljine** zbog činjenice koja kaže:

$$|\vec{v}| \neq \vec{v}$$

ali

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$$

Dakle, zamjena vektora i njegove duljine je moguća ako se kvadriraju, inače NE.

Zato idemo računati $|\vec{v}|^2 a\ ne\ |\vec{v}|$ .

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2$$

No, imajući na umu gornju napomenu $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9\ \ i\ \ \vec{b}^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = 3$ pa ostaje još samo izračunati $\vec{a} \cdot \vec{b}$ što je skalarni umnožak koji po definiciji iznosi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-9}{2}$$

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti imamo:

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2 = 4 \cdot 9 - 12 \cdot \frac{-9}{2} + 9 \cdot 3 = 117$$

Nakon korjenovanja računamo $|\vec{v}| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ .

21. Ako je $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, te $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, koliki kut zatvaraju vektori $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$?

Primijenimo formulu za kosinus kuta:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Izračunajmo $\vec{u}\cdot\vec{v}$ i $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$:

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = \mathbf{2}$$

Pri računanju duljina vektora koristimo činjenice navedene u napomeni uz 20. Zadatak (treba računati kvadrate duljina, a ne same duljine):

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2 = 3+3+1 = 7$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2 = 3-3+1 = 1$$

$$|\vec{v}| = 1$$

Uvrstimo sve izračunate podatke u formulu za kosinus kuta:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Uz pomoć kalkulatora imamo: $\varphi = 40°\, 53'\, 36''$.

22. Ako je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 24$, koliko je $|\vec{a}-\vec{b}|$ ?

Po napomeni iz 20. Zadatka računat ćemo $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ a ne $|\vec{a}-\vec{b}|$:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + |\vec{b}|^2$$

Problem je što na desnoj strani ne znamo kut $\varphi$ !? Stoga raspišimo i $|\vec{a}+\vec{b}|^2$:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + |\vec{b}|^2$$

Zbrajanjem tih dviju jednakosti:

$$\begin{cases} |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + |\vec{b}|^2 \end{cases}$$

eliminirati ćemo kut $\varphi$:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

Te prebacivanjem izraza $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ na desnu stranu jednadžbe i uvrštavanjem vrijednosti imamo:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2=2\cdot169+2\cdot361+576=1636$$

Naravno, još korjenovanje:

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1636}=2\sqrt{409}$$

23. Ako je $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2$, te $\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, izračunaj $\vec{m}\cdot\vec{n}$, gdje je $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{n}=\vec{2}\vec{a}-\vec{b}$.

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\vec{b}^2=2\vec{a}^2-5\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\vec{b}^2$$

$$=2\cdot|\vec{a}|^2-5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-2\cdot|\vec{b}|^2=2\cdot9-5\cdot3\cdot2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)-2\cdot4=25$$

24. Kolike su duljine dijagonala paralelograma ABCD, ako je $\overrightarrow{AB}=5\vec{a}+2\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$, $|\vec{a}|=2\sqrt{2},\ |\vec{b}|=3$, te $\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b})=45^0$ ?

S obzirom da vektori $\overrightarrow{AB}$ $i$ $\overrightarrow{AD}$ leže na stranicama paralelograma, dijagonale paralelograma su jednake zbroju i razlici tih vektora:

$$\text{dijagonala } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=6\vec{a}-\vec{b}$$
$$\text{dijagonala } \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-4\vec{a}-5\vec{b}$$

I kao što smo već vidjeli u prethodnim zadacima, računamo **kvadrate duljina**:

$$|\overrightarrow{AC}|^2=(6\vec{a}-\vec{b})^2=36\vec{a}^2-12\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=36|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ+|\vec{b}|^2$$

$$=288-72+9=225$$

Nakon korjenovanja: $|\overrightarrow{AC}|=25$.

$$|\overrightarrow{BD}|^2=(-4\vec{a}-5\vec{b})^2=16\vec{a}^2+40\vec{a}\vec{b}+25\vec{b}^2=16|\vec{a}|^2+40|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ+25|\vec{b}|^2$$

$$=128+240+75=225$$

Nakon korjenovanja: $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{443}$

25. Kolike su duljine dijagonala paralelograma ABCD, ako je $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 2\vec{n}$ , gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori te $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ ?

Zadatak je, po postupku rješavanja, identičan prethodnom zadatku. Najprije računamo dijagonale, a potom kvadrate duljina tih dijagonala:

$$\text{dijagonala } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{m} - \vec{n}$$

$$\text{dijagonala } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\vec{m} - 3\vec{n}$$

Kvadrati duljina dijagonala:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = (3\vec{m} - \vec{n})^2 = 9\vec{m}^2 - 6\vec{m}\vec{n} + \vec{m}^2 = 9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{\pi}{3} + |\vec{n}|^2 = 9 - 2 + 1 = 8$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = (-\vec{m} - 3\vec{n})^2 = \vec{m}^2 + 6\vec{m}\vec{n} + 9\vec{m}^2 = |\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{\pi}{3} + 9|\vec{n}|^2 = 1 + 2 + 9 = 12$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Svim učenicima želim ugodno rješavanje i puno uspjeha na pismenom ispitu

☺

Ukoliko ima nejasnoća, pitanja, eventualnih grešaka možete javiti na E-mail

mbuzancic@msn.com