ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj lubenica, a y broj dinja u Jurinom vrtu.

Za prodaju četvrtinu broja lubenica i polovine broja dinja Jure će dobiti $\left(\frac{x}{4}\cdot 8+\frac{y}{2}\cdot 6\right)$ kn. 1 BOD

Za prodaju dvanaestine broja lubenica i tri četvrtine broja dinja Jure će dobiti $\left(\frac{x}{12}\cdot 8+\frac{3}{4}\cdot y\cdot 6\right)$ kn.

1 BOD

Prema uvjetima zadataka vrijede dvije jednadžbe:

$\frac{x}{4}\cdot 8+\frac{y}{2}\cdot 6=\frac{x}{12}\cdot 8+\frac{3}{4}\cdot y\cdot 6$ 1 BOD

i $8x-6y=192$. 1 BOD

Pojednostavljivanjem prve jednadžbe dobivamo:

$2x+3y=\frac{2}{3}x+\frac{9}{2}y \quad / \cdot 6$ 1 BOD

$12x + 18y = 4x + 27$ 1 BOD

$8x - 9y = 0$ 1 BOD

Rješavanjem sustava

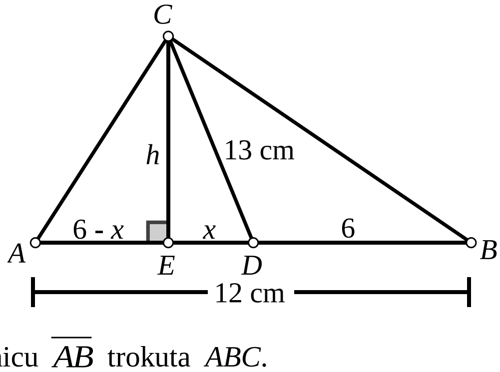
$$\begin{cases} 8x-9y=0 \\ 8x-6y=192 \end{cases}$$

dobivamo $x = 72$, $y = 64$. 2 BODA

Jure u vrtu ima 72 lubenice i 64 dinje. 1 BOD

……………………………………………………..……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

2.



Dužina $\overline{CE}$ je visina na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC.

Označimo s D polovište stranice $\overline{AB}$. Tada je $\overline{CD}$ težišnica na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC i vrijedi

$|AD| = |DB| = \frac{1}{2}|AB| = 6$ cm. 1 BOD

Površina trokuta ABC je 72 cm^2, pa uz oznake kao na slici vrijedi:

$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CE| = 72,$ 1 BOD

$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 72,$

$h = 12$ cm. 1 BOD

Trokut *CED* je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$x^2 = 13^2 - h^2,$ 1 BOD

$x^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$

tj. $x = 5$ cm. 1 BOD

Tada je $|AE| = 6 - x = 1$ cm i $|EB| = x + 6 = 11$ cm. 1 BOD

Trokut *CEB* je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$|BC|^2 = |CE|^2 + |EB|^2,$ 1 BOD

$|BC|^2 = 12^2 + 11^2 = 265,$

$|BC| = \sqrt{265}$ cm. 1 BOD

Trokut *CEA* je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$|AC|^2 = |CE|^2 + |AE|^2,$ 1 BOD

$|AC|^2 = 12^2 + 1^2 = 145,$

tj. $|AC| = \sqrt{145}$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} =$

$= 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a +$

$+ 100c + 10a + b + 100c + 10b + a =$ 2 BODA

$= 222a + 222b + 222c =$ 2 BODA

$= 222 \cdot (a + b + c) =$ 1 BOD

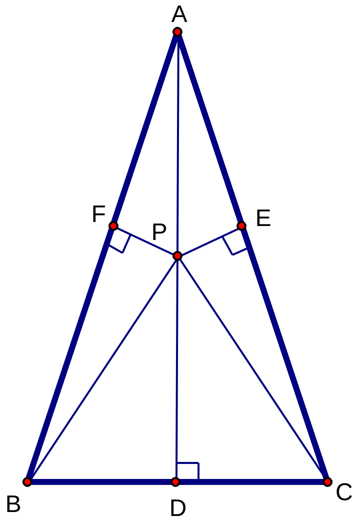
$= 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$ 2 BODA

Da bi zadani zbroj bio kvadrat nekog prirodnog broja, zbroj $a + b + c$ mora biti najmanje jednak umnošku $2 \cdot 3 \cdot 37$.

To je nemoguće jer najveći zbroj triju znamenaka iznosi 27 ($9 + 9 + 9 = 27$). 3 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.
Neka su točke E i F nožišta okomica iz točke P na krakove $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.
Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Trokuti AFP i APE sukladni su po poučku o sukladnosti trokuta KSK ($\overline{AP}$ je zajednička stranica, $|\angle PAF| = |\angle PAE|$ jer je trokut ABC jednakokračan, $|\angle PFA| = |\angle AEP| = 90°$, pa je i $|\angle APF| = |\angle EPA|$). 2 BODA

Neka je $|PE| = |PF| = k$, $k > 0$. Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|PD| = 3k$, odnosno duljina visine na osnovicu je $v_a = |AD| = 6k$. 1 BOD

Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta BCP, CAP i ABP. Vrijedi:

$$p_{\Delta ABC} = p_{\Delta BCP} + p_{\Delta CAP} + p_{\Delta ABP}$$

$$\frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{|BC| \cdot |PD|}{2} + \frac{|AC| \cdot |PE|}{2} + \frac{|AB| \cdot |PF|}{2}$$ 2 BODA

$$\frac{a \cdot 6k}{2} = \frac{a \cdot 3k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} \quad / \cdot 2$$

$6ak = 3ak + 2bk$

$3a = 2b$ 1 BOD

$$a = \frac{2}{3} \cdot b = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ cm}$$ 1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo duljinu visine:

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |DC|^2$$

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2$$

$$v_a^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2$$ 1 BOD

$$v_a^2 = 8 - \frac{8}{9}$$

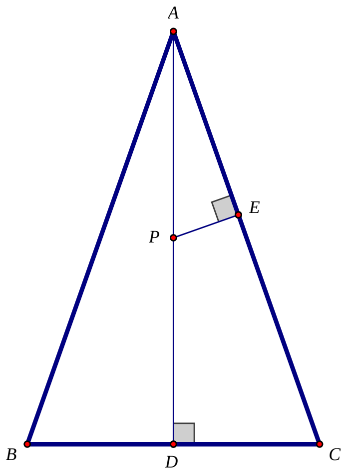
$$v_a^2 = \frac{64}{9}$$

$$v_a = \frac{8}{3} \text{ cm}$$ 1 BOD

Konačno je $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}\sqrt{2}$ cm^2. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.

Neka je točka E nožište okomice iz točke P na krak $\overline{AC}$.

Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Ako je v_a duljina visine na osnovicu, onda iz uvjeta zadatka slijedi $|AP| = |PD| = \frac{v_a}{2}$ i $|PE| = \frac{v_a}{6}$.

1 BOD

Trokuti ADC i APE su slični (imaju iste kutove; oba su trokuta pravokutna i imaju isti kut $\angle PAE$).

2 BODA

Iz sličnosti trokuta ADC i APE slijedi:

$\frac{a}{2} : b = \frac{v_a}{6} : \frac{v_a}{2}$, 2 BODA

odnosno $a = \frac{2}{3} b$. 1 BOD

Slijedi $a = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. 1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo duljinu visine:

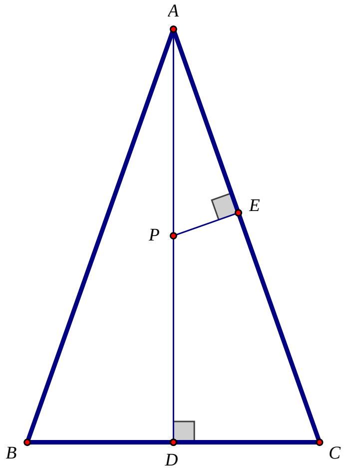
$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8 - \frac{8}{9} = \frac{64}{9}$, 1 BOD

$v_a = \frac{8}{3}$ cm. 1 BOD

Konačno je $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2}$ cm^2. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.

Neka je točka E nožište okomice iz točke P na krak $\overline{AC}$.

Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Ako je v_a duljina visine na osnovicu, onda iz uvjeta zadatka slijedi $|AP| = |PD| = 3 \cdot |PE|$.

Neka je $|PE| = k,\ k > 0$. Tada je $|AP| = 3k$, a $v_a = 6k$. 1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut APE slijedi:

$|AE|^2 = |AP|^2 - |PE|^2 = (3k)^2 - k^2 = 8k^2$,

$|AE| = 2\sqrt{2}k$. 1 BOD

Trokuti ADC i APE su slični (pravokutni trokuti kojima je kut $\angle PAE$ zajednički). 2 BODA

Iz sličnosti trokuta ADC i APE slijedi:

$|AP| : |AC| = |AE| : |AD|$, 1 BOD

$3k : 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}k : 6k$,

odnosno $k = \frac{4}{9}$. 1 BOD

Slijedi da je $v_a = 6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$ cm. 1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo osnovicu:

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v_a^2$, 1 BOD

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$,

$\frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$a = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. 1 BOD

Konačno je $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2}$ cm². 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

a) Za svaku od pet znamenki imamo pet mogućnosti.

Stoga ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$ takvih brojeva. 3 BODA

b) Da bi se svaka od znamenki koristila barem jednom, jedna znamenka se mora koristiti dvaput, a sve ostale po jednom.

Za to imamo 5 mogućnosti – dvaput se može pojaviti znamenka 1, 2, 3, 4 ili 5. 1 BOD

Za odabrani izbor znamenki (npr. 1, 1, 2, 3, 4, 5) za znamenku koja se pojavljuje dvaput možemo na $\frac{6 \cdot 5}{2}$ načina odabrati mjesta na kojima će se pojaviti.

Nakon toga preostale znamenke možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2$ načina.

To možemo načiniti na ukupno $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 360$ načina. 4 BODA

Imamo 5 mogućnosti za izbor znamenke koje se pojavljuje dvaput, pa ukupno imamo $5 \cdot 360 = 1800$ takvih brojeva. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

a) Za svaku od pet znamenki imamo pet mogućnosti.

Stoga ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$ takvih brojeva. 3 BODA

b) Da bi se svaka od znamenki koristila barem jednom, jedna znamenka se mora koristiti dvaput, a sve ostale po jednom.

Za to imamo 5 mogućnosti – dvaput se može pojaviti znamenka 1, 2, 3, 4 ili 5. 1 BOD

Za odabrani izbor znamenki (npr. 1, 1, 2, 3, 4, 5) te znamenke možemo raspoređivati na $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 360$ načina.

(Obrazloženje: Najprije zamislimo da raspoređujemo šest različitih znamenaka na šest mjesta. Prvu možemo rasporediti na šest načina, drugu na pet, treću na četiri, itd…

Takvim raspoređivanjem dobit ćemo dvaput više željenih brojeva, jer za svaki raspored dvije iste znamenka na dva fiksna mjesta, imamo još jedan takav raspored.) 4 BODA

Konačno, ukupno imamo $5 \cdot 360 = 1800$ takvih brojeva. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA