ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. veljače 2022.
4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: (300 + 10 · 3 + 7) · (567829 – 567827) · (2 + 2 : 2).

Rješenje.

(300 + 10 · 3 + 7) · (567829 – 567827) · (2 + 2 : 2)
= (300 + 30 + 7) · (567829 – 567827) · (2 + 2 : 2) 1 BOD
= 337 · (567829 – 567827) · (2 + 2 : 2) 1 BOD
= 337 · 2 · (2 + 2 : 2) 1 BOD
= 337 · 2 · (2 + 1) 1 BOD
= 337 · 2 · 3 1 BOD
= 2022 1 BOD
…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za svaki od izraza 300 + 10 · 3 + 7 i 2 + 2 : 2 u prvoj i trećoj zagradi boduje se poštivanje redoslijeda izvođenja računskih operacija, po 2 BODA (npr. ako učenik pogriješi u množenju dobiva 1 BOD za poštivanje redoslijeda, ali gubi 1 BOD zbog pogrešnog rezultata).
Oduzimanje brojeva u drugoj zagradi boduje se jednim bodom i konačno, množenje u zadnjem koraku boduje se jednim bodom.

2. Na dvije je hrpe ukupno 411 kartica. Kad bi se iz prve hrpe premjestile na drugu 39 kartice, tada bi na prvoj hrpi bilo dvostruko više kartica nego na drugoj. Koliko je kartica bilo na svakoj hrpi?

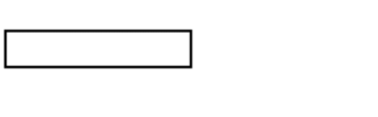
Prvo rješenje.

Premještanjem kartica dobijemo veću hrpu s dvostruko više kartica. Na manjoj se hrpi nalazi trećina svih kartica pa ukupan broj kartica treba podijeliti s 3. 1 BOD
411 : 3 = 137 1 BOD
Nakon premještanja na većoj hrpi je 2 · 137 = 274 kartice. 1 BOD
Prije premještanja na većoj je hrpi bilo 274 + 39 = 313 kartica. 1 BOD
Nakon premještanja na manjoj hrpi je 137 kartica. 1 BOD
Prije premještanja na manjoj je hrpi bilo 137 – 39 = 98 kartica. 1 BOD
…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Nakon premještanja dobijemo dvije hrpe kartica. Veća od njih ima dvostruko više kartica što možemo prikazati na ovaj način:

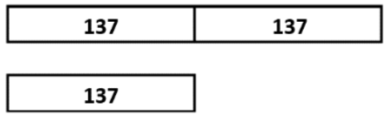
- nakon premještanja



1 BOD

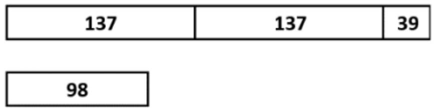
411 : 3 = 137 1 BOD

- nakon premještanja



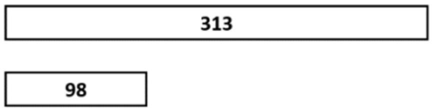
2 BODA

- prije premještanja



1 BOD

- prije premještanja

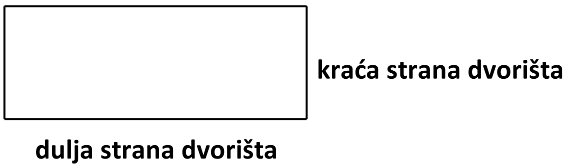


1 BOD

…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

3. Luna je dvaput obišla dvorište pravokutnog oblika za tri minute i dvadeset sekundi. Uz svaku kraću stranu dvorišta hodala je 15 s. Koliko je vremena hodala uz svaku dulju stranu dvorišta? Luna je cijelo vrijeme hodala jednakom brzinom.

Prvo rješenje.



U svom obilasku Luna je uz kraću stranu dvorišta prošla ukupno 4 puta i za to joj je trebalo
$(4 \cdot 15)$ sekundi = 60 sekundi. 2 BODA

Dvorište je dvaput obišla za 3 minute i 20 sekundi = 200 sekundi. 1 BOD

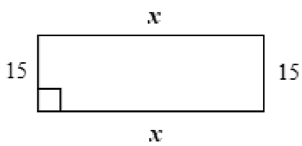
U svom obilasku Luna je uz dulju stranu dvorišta ukupno hodala $(200 - 60)$ sekundi = 140 sekundi. 1 BOD

Kako je uz dulju stranu dvorišta prošla ukupno 4 puta, onda je uz svaku dulju stranu dvorišta hodala $(140 : 4)$ sekundi = 35 sekundi. 2 BODA

…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Luna je dvaput obišla dvorište za $(3 \cdot 60 + 20)$ sekundi = 200 sekundi. 1 BOD
Jedan je obilazak trajao $(200 : 2)$ sekundi = 100 sekundi. 1 BOD
Neka je x vrijeme koje joj je bilo potrebno za hodanje uz jednu dulju stranu dvorišta.

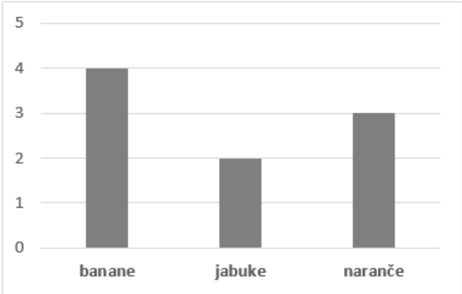


1 BOD

Uz dvije kraće strane dvorišta hodala je $(2 \cdot 15)$ sekundi = 30 sekundi. 1 BOD
Preostalo joj je $(100 - 30)$ sekundi = 70 sekundi za hodanje uz dvije dulje strane dvorišta. 1 BOD
Znači da je uz svaku dulju stranu dvorišta hodala $x = (70 : 2)$ sekundi = 35 sekundi. 1 BOD

…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

4. Na skladištu se nalazi ukupno 945 kg voća pakiranog u vreće. U svim je vrećama jednaka masa voća. Broj vreća pojedinog voća prikazan je dijagramom. Koliko je na skladištu kilograma banana, koliko kilograma jabuka, a koliko kilograma naranči?



Rješenje.

Na skladištu je ukupno $4 + 2 + 3 = 9$ vreća voća. 1 BOD

Svaka vreća ima masu $(945 : 9)$ kg = 105 kg. 2 BODA

To znači da da je na skladištu:

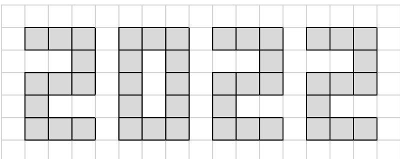
$(4 \cdot 105)$ kg = 420 kg banana, 1 BOD

$(2 \cdot 105)$ kg = 210 kg jabuka i 1 BOD

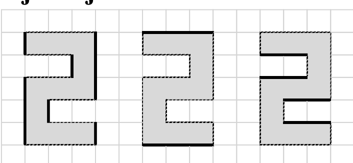
$(3 \cdot 105)$ kg = 315 kg naranči. 1 BOD

…....…………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

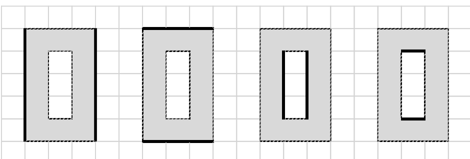
5. Pomoću sivih kvadratnih pločica sa stranicom duljine 5 cm Margita je na papir složila četiri lika kao na slici. Potom je svaki lik obrubila crvenim flomasterom kako bi na papiru istaknula broj 2022. Margitina majka smatra da je duljina svih obruba barem 5 m. Je li Margitina majka u pravu? Obrazloži svoj odgovor.



Rješenje.



Lik oblika broja dva ima opseg jednak $10 + 6 + 8 = 24$ duljine stranice kvadratne pločice, tj.
$24 \cdot 5=120$ cm. 1 BOD



Lik oblika broja nula ima opseg jednak $10 + 6 + 6 + 2 = 24$ duljine stranice kvadratne pločice, tj.
$24 \cdot 5=120$ cm. 1 BOD

Kako je složila tri lika oblika broja dva i jedan lik oblika broja nula, ukupna duljina crvene crte je
$3 \cdot 120 + 120 = 480$ cm. 2 BODA
5 m = 500 cm 1 BOD
Margitina majka **nije** u pravu jer je $480 < 500$. 1 BOD
…....………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

6. Viktor je zamislio neki broj. Broju 456 je dodao zamišljeni broj. Nastavio je dodavati zamišljeni broj svakom dobivenom zbroju sve dok nije dobio broj 555. Postupak dodavanja zamišljenog broja ponovio je više od 10 puta. Koji je broj zamislio Viktor? Odredi sve mogućnosti i zapiši obrazloženje.

Prvo rješenje.
$555 - 456 = 99$
Broj 99 treba zapisati kao zbroj jednakih pribrojnika. 1 BOD
Ako je zamislio broj 1, tada je taj broj dodavao $99 : 1 = 99$ puta. 1 BOD
Ako je zamislio broj 2, tada bi taj broj dodavao $99 : 2$ puta, što je nemoguće. 1 BOD
Isto tako nije mogao zamisliti niti jedan drugi paran broj jer je broj 99 neparan. 1 BOD
Ako je zamislio broj 3, tada je taj broj dodavao $99 : 3 = 33$ puta. 1 BOD
Ako je zamislio broj 5, tada je taj broj dodavao $99 : 5$ što je nemoguće. 1 BOD
Ako je zamislio broj 7, tada je taj broj dodavao $99 : 7$ što je nemoguće. 1 BOD
Ako je zamislio broj 9, tada je taj broj dodavao $99 : 9 = 11$ puta. 1 BOD
Ako je zamislio broj 11, tada je taj broj dodavao $99 : 11 = 9$ puta. 1 BOD
Ako nastavimo povećavati broj koji je Viktor zamislio, onda će se nastaviti smanjivati broj dodavanja. To znači da će zamišljeni broj dodati manje od 10 puta što nije moguće zbog uvjeta zadatka.
1 BOD
…....……………………………………………………………....….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za eliminaciju mogućnosti da je zamišljeni broj paran potrebno je napisati objašnjenje. U protivnom, za 1 BOD učenik mora eliminirati sve preostale mogućnosti (zamišljeni broj ne može biti 4, 6, 8 i 10).

Drugo rješenje.
Viktor je zamišljeni broj dodao broju 456 nekoliko puta.
Na kraju je dobio zbroj 555 što znači da se razlika $555 - 456 = 99$, 1 BOD
može zapisati kao zbroj jednakih pribrojnika, odnosno kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan zamišljeni broj. 1 BOD
Kako je broj ponavljanja veći od 10, onda je faktor u umnošku koji označava broj ponavljanja veći od 10. 1 BOD
Zapišimo broj 99 kao umnožak dva broja
$99 = 99 \cdot 1$
$99 = 33 \cdot 3$
$99 = 11 \cdot 9$ 4 BODA

Broj 1 je mogao dodavati 99 puta, tj. zamišljeni broj je 1. 1 BOD
Broj 3 je mogao dodavati 33 puta, tj. zamišljeni broj je 3. 1 BOD
Broj 9 je mogao dodavati 11 puta, tj. zamišljeni broj je 9. 1 BOD
…....……………………………………………………………....….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Zapis broja 99 u obliku umnoška dvaju faktora boduje se s 4 BODA. Ukoliko učenik zapiše samo jedan umnožak, dobiva 1 BOD, a za zapisana dva umnoška, 2 BODA.

Napomena 2: Podaci se mogu organizirati i tablično:

Umnožak	Zamišljeni broj	Broj ponavljanja
$99 \cdot 1$	1	99
$33 \cdot 3$	3	33
$11 \cdot 9$	9	11
ukupno 4 BODA	ukupno 3 BODA	

7. Igraća kockica na svim stranama ima različiti broj točaka, od jedne do šest, a zbroj brojeva točaka na suprotnim stranama kocke je uvijek 7. Od 1000 igraćih kockica složena je kocka dimenzija $10 \times 10 \times 10$. Koliki je najmanji mogući broj svih točaka koje su vidljive na stranama tako dobivene kocke?

Prvo rješenje.

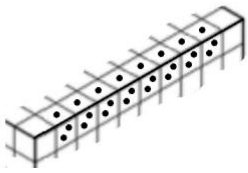
Kocka ima 8 vrhova. 1 BOD

Svaki vrh određuje po jedna igraća kockica.

Najmanji broj vidljivih točaka na svakoj takvoj kockici je $1 + 2 + 3 = 6$. 1 BOD

Stoga je najmanji mogući broj vidljivih točaka na svih osam igraćih kockica u vrhovima $8 \cdot 6 = 48$.
1 BOD

Kocka ima 12 bridova. 1 BOD

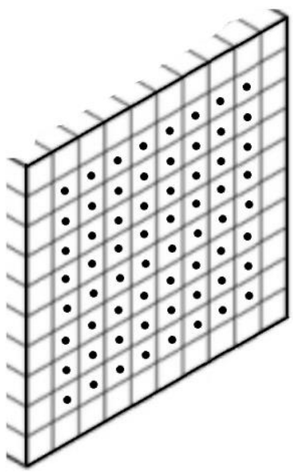


Svaki taj brid određen je s 8 kockica koje nisu u vrhovima.

Najmanji broj vidljivih točaka na svakoj takvoj kockici je $1 + 2 = 3$. 1 BOD

Stoga je najmanji mogući broj vidljivih točaka na svim bridovima $12 \cdot 8 \cdot 3 = 288$. 1 BOD

Kocka ima 6 strana. 1 BOD



Svaka je strana određena s $8 \cdot 8 = 64$ kockice koje nisu na bridovima. 1 BOD
Najmanji broj vidljivih točaka na svakoj takvoj kockici je 1.
Stoga je najmanji mogući broj vidljivih točaka na svim stranama $6 \cdot 64 \cdot 1 = 384$. 1 BOD
Najmanji mogući broj vidljivih točaka na takvoj kocki je $48 + 288 + 384 = 720$. 1 BOD
……………………………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Na dvije strane velike kocke najmanji broj vidljivih točaka na svakoj kockici je 1. 1 BOD
Broj vidljivih točaka na svakoj takvoj strani je $100 \cdot 1 = 100$, a na dvije je 200. 1 BOD
Na dvije strane velike kocke najmanji mogući broj vidljivih točaka na svakoj kockici koja određuje brid je 2, a na preostalim kockicama je 1. 2 BODA
Broj vidljivih točaka na svakoj takvoj strani je $64 \cdot 1 + 36 \cdot 2 = 136$, a na dvije je 272. 1 BOD
Na dvije strane velike kocke najmanji mogući broj vidljivih točaka na svakoj kockici u vrhovima je 3, na kockicama koje određuju dva brida je 2, a na preostalim kockicama je 1. 3 BODA
Broj vidljivih točaka na svakoj takvoj strani je $4 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 80 \cdot 1 = 124$, a na dvije je 248. 1 BOD
Najmanji mogući broj vidljivih točaka na takvoj kocki je $200 + 272 + 248 = 720$. 1 BOD
……………………………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

15. veljače 2022.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: $2022 \cdot 35 - 2022 \cdot 34 + 32 \cdot 2022 - 33 \cdot 2022$.

Prvo rješenje.

$2022 \cdot 35 - 2022 \cdot 34 + 32 \cdot 2022 - 33 \cdot 2022$

$= 2022 \cdot (35 - 34 + 32 - 33)$ 4 BODA

$= 2022 \cdot 0$ 1 BOD

$= 0$ 1 BOD

…....…………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

$2022 \cdot 35 - 2022 \cdot 34 + 32 \cdot 2022 - 33 \cdot 2022$

$= 70\,770 - 68\,748 + 64\,704 - 66\,726$ 4 BODA

$= 2022 + 64\,704 - 66\,726$ 1 BOD

$= 66\,726 - 66\,726 = 0$ 1 BOD

…....…………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

2. Za opremanje učionica škola je nabavila pakete od dva računala i jednog pisača. Svaka je učionica opremljena s dva računala koji su spojeni na jedan pisač. Cijena jednog računala je 1968 kuna, a cijena jednog pisača tri je puta manja od cijene jednog računala. Županija je školi uplatila 8036 kn, što je četvrtina ukupne cijene. Koliko je škola kupila računala, a koliko pisača?

Rješenje.

Ukupna cijena svih računala i pisača je $8036 \cdot 4 = 32\,144$ kn. 1 BOD

Cijena jednog pisača je $1968 : 3 = 656$ kn. 1 BOD

Paket od 2 računala i jednog pisača košta $2 \cdot 1968 + 656 = 4592$ kn. 2 BODA

Škola je kupila $32\,144 : 4592 = 7$ takvih paketa. 1 BOD

Škola je kupila 14 računala i 7 pisača. 1 BOD

..…………………………………………………………………..……......... UKUPNO 6 BODOVA

3. Od 99 učenika 5. razreda koji su gledali projekciju filma njih 76 je kupilo sok, a njih 59 kokice. Devetina od ukupnog broja učenika nije kupila ni sok ni kokice. Izračunaj koliko je učenika kupilo:

a) samo sok

b) samo kokice

c) i sok i kokice.

Rješenje.

Zadatak možemo riješiti Vennovim dijagramom.

Neka je U skup svih učenika koji su gledali projekciju filma, S skup svih učenika koji su kupili sok, a K skup svih učenika koji su kupili kokice.

Devetina od ukupnog broja učenika je 99 : 9 = 11 nije kupila ni sok ni kokice. 1 BOD

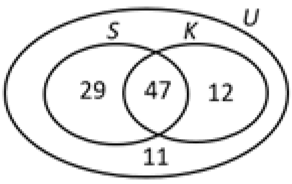
Film je gledalo 99 učenika, 11 ih nije kupilo ni sok ni kokice pa zaključujemo da je 99 – 11 = 88 kupilo barem nešto (ili samo sok ili samo kokice ili i sok i kokice). 1 BOD

Ukupan broj kupljenih sokova i kokica je 76 + 59 = 135.

135 – 88 = 47 učenika kupilo i sok i kokice (presjek skupova S i K nije prazan skup). 2 BODA

76 učenika je kupilo sok, a 47 i sok i kokice pa zaključujemo da je 76 – 47 = 29 učenika kupilo samo sok. 1 BOD

59 učenika je kupilo kokice, a 47 i sok i kokice pa zaključujemo da je 59 – 47 = 12 učenika kupilo samo kokice. 1 BOD

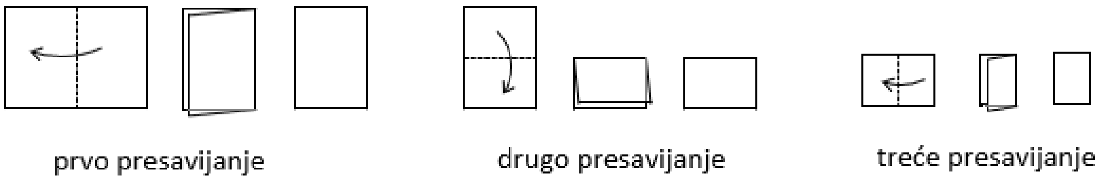


…………………………………………………………………..……........ UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik Vennovim dijagramom prikaže rješenje (slika) pri čemu je u zadatku jasno naznačeno koji su elementi pojedinog skupa učenik može ostvariti svih 6 BODOVA.

Ako skupovi nisu definirani, za Vennov dijagram (slika) učenik treba ostvariti 3 BODA, a preostala 3 BODA treba raspodijeliti na tražene odgovore.

4. Papir ima oblik pravokutnika kojemu su susjedne stranice duljina 480 mm i 360 mm. Papir presavijamo tako da dvije stranice manje duljine položimo jednu na drugu (vidi crtež). Kolika je površina pravokutnika koji se dobije nakon petog presavijanja?



Prvo rješenje.

Nakon prvog presavijanja površina papira je 2 puta manja od površine početnog papira. 1 BOD

Nakon drugog presavijanja površina papira je 4 puta manja od površine početnog papira, a nakon trećeg presavijanja površina papira je 8 puta manja od površine početnog papira. 1 BOD

Zaključujemo da će nakon 5 presavijanja površina papira biti 32 puta manja od površine početnog papira. 1 BOD

Površina početnog papira je 480 mm · 360 mm = 172 800 mm^2. 1 BOD

Površina papira dobivenog nakon 5 presavijanja je 172 800 mm^2 : 32 = 5400 mm^2. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Zaključak da se nakon 5 presavijanja površina papira smanji 32 puta boduje se s 3 BODA, od kojih 2 donosi obrazloženje. Učenik do tog zaključka može doći na razne načine. Ukoliko obrazloženje nije napisano učenik u tom dijelu zadatka ostvaruje 1 BOD.

Napomena 2: Bodove na konačan rezultat ne treba umanjivati ako nedostaje mjerna jedinica.

Drugo rješenje.

Odredimo duljine stranica papira nakon svakog presavijanja.

broj presavijanja	duljine stranica papira	
0	480 mm i 360 mm	
1	240 mm (480 mm : 2) i 360 mm	1 BOD
2	240 mm i 180 mm (360 mm : 2)	1 BOD
3	120 mm (240 mm : 2) i 180 mm	1 BOD
4	120 mm i 90 mm (180 mm : 2)	1 BOD
5	60 mm (120 mm : 2) i 90 mm	1 BOD

Površina papira dobivenog nakon 5 presavijanja je 60 mm · 90 mm = 5400 mm^2 1 BOD

…………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 3: Ako učenik presavijanja prikaže crtežima svaki crtež na kojem pišu točne dimenzije novonastalog pravokutnika vrednovati analogno gornjoj tablici.

Treće rješenje.

Odredimo površinu početnog papira i površinu papira nakon svakog presavijanja.
Početni papir ima stranice duljine 480 mm i 360 mm pa je njegova površina
$480 \text{ mm} \cdot 360 \text{ mm} = 172\,800 \text{ mm}^2$. 1 BOD

Nakon prvog presavijanja površina papira se smanji dva puta pa je površina papira nakon prvog presavijanja $172\,800 \text{ mm}^2 : 2 = 86\,400 \text{ mm}^2$. 1 BOD

Nakon drugog presavijanja površina papira se smanji dva puta pa je površina papira nakon drugog presavijanja $86\,400 \text{ mm}^2 : 2 = 43\,200 \text{ mm}^2$. 1 BOD

Nakon trećeg presavijanja površina papira se smanji dva puta pa je površina papira nakon trećeg presavijanja $43\,200 \text{ mm}^2 : 2 = 21\,600 \text{ mm}^2$. 1 BOD

Nakon četvrtog presavijanja površina papira se smanji dva puta pa je površina papira nakon četvrtog presavijanja $21\,600 \text{ mm}^2 : 2 = 10\,800 \text{ mm}^2$. 1 BOD

Nakon petog presavijanja površina papira se smanji dva puta pa je površina papira nakon petog presavijanja $10\,800 \text{ mm}^2 : 2 = 5400 \text{ mm}^2$.

Površina papira dobivenog nakon 5 presavijanja je 5400 mm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………………...……..… UKUPNO 6 BODOVA

5. Odredi zbroj svih četveroznamenkastih brojeva u kojima svake dvije uzastopne znamenke čine kvadrat prirodnog broja. (Na primjer, 164 je takav troznamenkasti broj jer su 16 i 64 kvadrati brojeva 4 i 8).

Rješenje.

Dvoznamenkasti kvadrati su 16, 25, 36, 49, 64 i 81. 1 BOD

Ako počnemo sa 16 nastaje niz 16, 64, 49 i četveroznamenkasti broj 1649. 1 BOD

Ako počnemo sa 36 nastaje niz 36, 64, 49 i četveroznamenkasti broj 3649. 1 BOD

Ako počnemo sa 81 nastaje niz 81, 16, 64 i četveroznamenkasti broj 8164. 1 BOD

Ako počnemo sa 25 niz se prekida jer ne postoji dvoznamenkasti kvadrat broja koji počinje znamenkom 5.

Ako počnemo sa 49 niz se prekida jer ne postoji dvoznamenkasti kvadrat broja koji počinje znamenkom 9.

Ako počnemo sa 64 nastaje niz 64, 49 troznamenkasti broj 649 i niz se prekida jer ne postoji dvoznamenkasti kvadrat broja koji počinje znamenkom 9. 1 BOD

Dakle, traženi brojevi su 1649, 3649 i 8164.

$1649 + 3649 + 8164 = 13462$ 1 BOD

…………………………………………………………………………......... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji bez pojašnjenja nabroji tražene brojeve 1649, 3649 i 8164 u tom dijelu zadatka, umjesto 3 BODA, može ostvariti najviše 2 BODA.

Napomena 2: Učenik koji, na bilo koji način, nije komentirao pokušaje nizanja s 25, 49 i 64 može ostvariti najviše 5 BODOVA.

6. Ana, Borna, Cvita i Davor izrađuju papirnate ždralove. Odlučili su napraviti 1000 ždralova. Ana i Borna su napravili 167 ždralova, a Borna i Cvita su napravili 181 ždrala. Ana je napravila 8 ždralova više od Davora. Trenutno im do zadanog broja ždralova nedostaje još 677 ždralova. Koliko ždralova je napravio svatko od njih?

Prvo rješenje.

Ana, Borna, Cvita i Davor su ukupno napravili 1000 – 677 = 323 ždrala. 1 BOD

Borna i Cvita su napravili 181 ždrala pa zaključujemo da su Ana i Davor napravili
323 – 181 = 142 ždrala. 2 BODA

Ako je Ana napravila 8 ždralova više od Davora, onda zaključujemo da je Davor napravio
(142 – 8) : 2 = 134 : 2 = 67 ždralova. 4 BODA

Ana je napravila 67 + 8 = 75 ždralova. 1 BOD

Ana i Borna su napravili 167 ždralova pa zaključujemo da je Borna napravio
167 – 75 = 92 ždrala. 1 BOD

Borna i Cvita su napravili 181 ždrala pa zaključujemo Cvita je napravila
181 – 92 = 89 ždralova. 1 BOD

……………………………………………………………………………..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka su a, b, c, d redom brojevi ždralova koje su izradili Ana, Borna, Cvita i Davor.

Vrijedi: $a + b = 167$, $b + c = 181$, $a - d = 8$,

$a + b + c + d = 1000 - 667 = 323$. 1 BOD

Uvrštavanjem izraza $b + c = 181$ u izraz $a + b + c + d = 323$ dobivamo $a + 181 + d = 323$ pa je

$a + d = 323 - 181 = 142$. 2 BODA

Iz izraza $a - d = 8$ dobivamo $a = 8 + d$. Uvrštavanjem u $a + d = 142$ dobivamo $8 + d + d = 142$.

2 BODA

Iz toga zaključujemo da je $2d = 142 - 8 = 134$ 1 BOD

pa je $d = 134 : 2$, $d = 67$.

Davor je napravilo 67 ždralova. 1 BOD

Uvrštavanjem $d = 67$ u $a + d = 142$ dobivamo $a + 67 = 142$, $a = 142 - 67$, $a = 75$.

Ana je napravila 75 ždralova. 1 BOD

Uvrštavanjem $a = 75$ u $a + b = 167$ dobivamo $75 + b = 167$, $b = 167 - 75$, $b = 92$.

Borna je napravio 92 ždrala. 1 BOD

Uvrštavanjem $b = 92$ u $b + c = 181$ dobivamo $92 + c = 181$, $c = 181 - 92$, $c = 89$.

Cvita je napravila 89 ždralova. 1 BOD

……………………………………………………………………………..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Što je veće i za koliko: zbroj svih parnih prirodnih brojeva a za koje vrijedi $75 \leq a \leq 214$ ili zbroj svih neparnih prirodnih brojeva b za koje vrijedi $135 \leq b \leq 242$?

Napomena 1: Bez obzira na način rješavanja bodove razdijeliti na sljedeći način: 4 BODA za točan postupak zbrajanja parnih brojeva a, 4 BODA za točan postupak zbrajanja neparnih brojeva b, 1 BOD za izračun razlike i 1 BOD za odgovor na postavljeno pitanje.

Napomena 2: Poznavanje formule za sumu aritmetičkog niza vrednovati analogno zbrajanju Gaussovom dosjetkom.

Rješenje.

- zbroj svih parnih prirodnih brojeva a za koje vrijedi $75 \leq a \leq 214$

1. način:

Parni prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost su 76, 78, 80, …, 212, 214.
- od 1 do 214 ima $214 : 2 = 107$ parnih brojeva
- od 1 do 74 ima $74 : 2 = 37$ parnih brojeva 1 BOD
- od 76 do 214 ima $107 - 37 = 70$ parnih brojeva 1 BOD

Zbroj brojeva iznosi

$76 + 78 + 80 + \cdots + 212 + 214 = (76 + 214) \cdot 35$ 1 BOD

$= 10\,150.$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 4 BODA

2. način:

Parni prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost su 76, 78, 80, …, 212, 214.

$2 + 4 + 6 + \cdots + 212 + 214 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 107) =$ 1 BOD

$= 2 \cdot (1 + 107) \cdot 107 : 2 = 11\,556$ 1 BOD

$2 + 4 + 6 + \cdots + 72 + 74 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 37) =$

$= 2 \cdot (1 + 37) \cdot 37 : 2 = 1406$ 1 BOD

$76 + 78 + 80 + \cdots + 212 + 214 = 11\,556 - 1406 = 10\,150$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 4 BODA

- zbroj svih neparnih prirodnih brojeva b za koje vrijedi $135 \leq b \leq 242$

1. način:

Neparni prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost su 135, 137, 139, …, 239, 241.
- od 1 do 242 ima $242 : 2 = 121$ neparni broj
- od 1 do 133 ima $134 : 2 = 67$ neparnih brojeva 1 BOD
- od 135 do 241 ima $121 - 67 = 54$ neparna broja 1 BOD

Zbroj brojeva iznosi

$135 + 137 + 139 + \cdots + 239 + 241 = (135 + 241) \cdot 27$ 1 BOD

$= 10\,152.$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 4 BODA

2. način:

Neparni prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost su 135, 137, 139, …, 239, 241.

- od 1 do 242 ima 242 : 2 = 121 neparni broj
- od 1 do 133 ima 134 : 2 = 67 neparnih brojeva 1 BOD

$1+3+5+\cdots+239+241=(0+1)+(2+1)+(4+1)+\cdots+(138+1)+(240+1)$

$=(0+2+4+\cdots+240)+121=\quad 2\cdot(1+2+3+\cdots+120)+121$

$=2\cdot(1+120)\cdot 120:2+121=14\,641$ 1 BOD

$1+3+5+\cdots+131+133=(0+1)+(2+1)+(4+1)+\cdots+(130+1)+(132+1)$

$=(0+2+4+\cdots+132)+67=2\cdot(1+2+3+\cdots+66)+67$

$=2\cdot(1+66)\cdot 66:2+67=4489$ 1 BOD

$135+137+139+\cdots+239+241=14\,641-4489=10\,152$ 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 4 BODA

3. način:

Neparni prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost su 135, 137, 139, …, 239, 241.

$1+3+5+\cdots+239+241=121^2=14\,641$ 2 BODA

$1+3+5+\cdots+131+133=67^2=4489$ 1 BOD

$135+137+139+\cdots+239+241=14\,641-4489=10\,152$ 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 4 BODA

$10\,152-10\,150=2$ 1 BOD

Veći je zbroj svih neparnih brojeva za 2. 1 BOD

…………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. veljače 2022.
6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

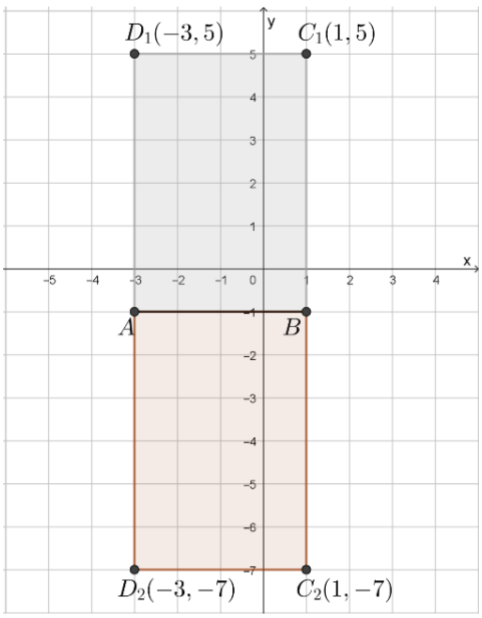
1. Izračunaj vrijednost izraza: $(-40-(-5)^4)\cdot 3+3^5:(-9)$.

Rješenje.
$(-40-(-5)^4)\cdot 3+3^5:(-9)=$
$=(-40-625)\cdot 3+243:(-9)$ 2 BODA
$=-665\cdot 3-27$ 2 BODA
$=-1995-27$ 1 BOD
$=-2022$ 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena:
Prva 2 BODA odnose se na izračunavanje obje potencije, 1 BOD za $(-5)^4$ i 1 BOD za 3^5.
Druga 2 BODA odnose se na izračunavanje razlike (1 BOD) i količnika (1 BOD).

2. Točke $A(-3,-1)$ i $B(1,-1)$ susjedni su vrhovi pravokutnika. Odredi sve moguće parove preostalih vrhova tog pravokutnika ako mu je površina 24 kvadratne jedinice.

Rješenje.
Točke A i B određuju stranicu pravokutnika duljine 4 jedinične dužine. 1 BOD
Ako je površina traženog kvadrata 24 kvadratne jedinice, zaključujemo da stranica pravokutnika susjedna stranici $\overline{AB}$ mora imati duljinu jednaku duljini 6 jediničnih dužina. 1 BOD
Prvi mogući par preostalih vrhova je $C_1(1,5)$ i $D_1(-3,5)$. 2 BODA
Drugi mogući par preostalih vrhova je $C_2(1,-7)$ i $D_1(-3,-7)$. 2 BODA

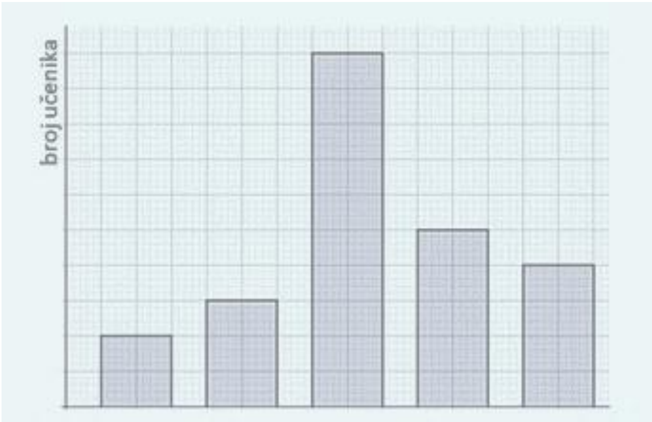


…………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

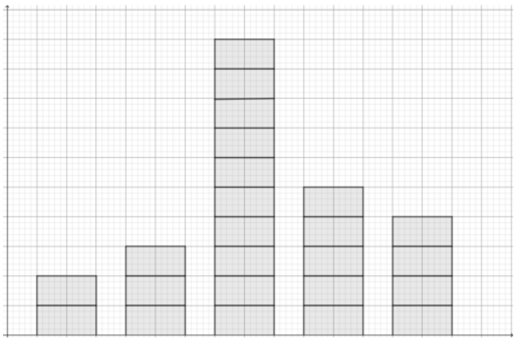
Napomena 1: Slika nije nužna za dobivanje svih bodova, ali moraju biti jasno istaknute koordinate preostalih vrhova pravokutnika.

Napomena 2: Ako učenik ima sliku s istaknutim koordinatama vrhova pravokutnika, kao na slici u rješenju, ali nema istaknutu duljinu dužine $\overline{AB}$ ili obrazloženje za duljinu druge stranice pravokutnika, ukupan broj bodova treba umanjiti za 1 odnosno 2 boda.

3. Nakon ankete koju je proveo među 96 učenika šestih razreda svoje škole, Leo je nacrtao stupčasti dijagram na slici, ali nije istaknuo brojeve na vertikalnoj osi, niti imena sportova na horizontalnoj osi. Zapamtio je da se plivanjem bavi pet puta više učenika nego tenisom, a dvostruko više nego rukometom. Košarkaša je manje nego vaterpolista. Koliko se učenika bavi košarkom?



Prvo rješenje.



Iz uvjeta zadatka da se „plivanjem bavi pet puta više učenika nego tenisom“ i odnosa visine trećeg i prvog stupca, zaključujemo da upravo treći stupac predstavljaju plivači, a prvi stupac tenisači.

1 BOD

Kako se vidi sa slike, imamo 24 jedinična dijela. 1 BOD

Jedan jedinični dio iznosi 96 : 24 = 4. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka da se „plivanjem bavi dvostruko više nego rukometom“ zaključujemo da četvrti stupac predstavljaju rukometaši. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka da je „košarkaša je manje nego vaterpolista“, a preostali su još drugi i peti stupac, zaključujemo da drugi stupac predstavljaju košarkaši. 1 BOD

Košarkom se bavi $3 \cdot 4 = 12$ učenika. 1 BOD

……………………………………………………………………..……........ UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

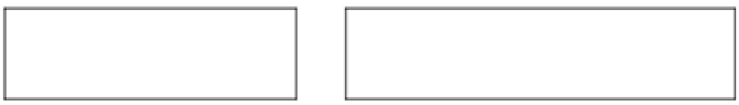
Iz uvjeta zadatka da se „plivanjem bavi pet puta više učenika nego tenisom“ i odnosa visine trećeg i prvog stupca, zaključujemo da upravo treći stupac predstavljaju plivači, a prvi stupac tenisači. 1 BOD

Broj učenika koji se bave tenisom označimo s x (1. stupac).
Plivanjem se tada bavi $5x$ učenika (3. stupac), a rukometom $2.5x$ učenika (4. stupac). 1 BOD
Iz dijagrama se može očitati, jer je košarkaša manje nego vaterpolista, da se košarkom bavi $1.5x$ učenika (2.stupac), a vaterpolom $2x$ učenika (5.stupac). 1 BOD
Vrijedi jednadžba $x + 1.5x + 5x + 2.5x + 2x = 96.$ 1 BOD
Slijedi $12x = 96$
$x = 8$ 1 BOD
Broj košarkaša je $1.5 \cdot 8$, tj. košarkom se bavi 12 učenika. 1 BOD
…………………………………………………………………..……....... UKUPNO 6 BODOVA

4. Blizanci Petar i Luka žele za svoje bicikle odabrati šifru lokota koja će biti četveroznamenkasti broj djeljiv brojevima 3 i 5. Obje šifre moraju sadržavati i njihove omiljene znamenke. Lukina omiljena znamenka je 3, a Petrova 8. Koje su šifre odabrali ako je Luka odabrao najmanji, a Petar najveći tako dobiveni četveroznamenkasti broj?

Rješenje.
Zbog djeljivosti brojem 5 zadnja znamenka tog broja mora biti 0 ili 5. 1 BOD
Zbog djeljivosti brojem 3 zbroj znamenaka tog broja mora biti djeljiv s 3. 1 BOD
Ako je **zadnja znamenka tog broja 0**, zbroj triju znamenaka je 0 + 3 + 8 = 11,
pa zaključujemo da preostala znamenka može biti 1, 4 ili 7. 1 BOD
Ako je **zadnja znamenka tog broja 5**, zbroj triju znamenaka je 5 + 3 + 8 = 16,
pa zaključujemo da preostala znamenka može biti 2, 5 ili 8. 1 BOD
Među svim mogućnostima, najmanji broj koji se može složiti je **1380** (Lukina šifra), 1 BOD
a najveći **8835** (Petrova šifra). 1 BOD
…..………………………………………………………………...……..… UKUPNO 6 BODOVA

5. Mislav je od papira izrezao dva pravokutnika različitih duljina ali jednake širine.



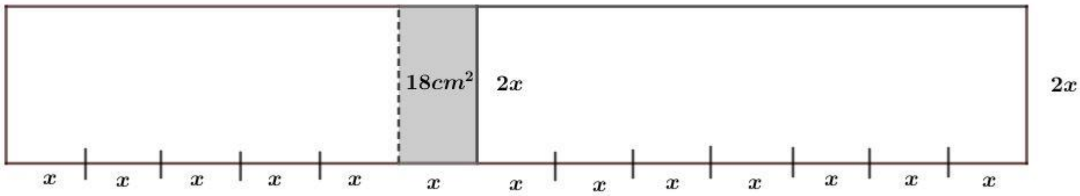
Zalijepio ih je tako da se dijelom preklapaju kao na slici i dobio novi pravokutnik.

Preklopljeni (osjenčani) dio ima površinu 18 cm^2, a širina mu je jednaka širini početnih pravokutnika. Duljina preklopljenog dijela jednaka je šestini duljine manjeg pravokutnika i osmini duljine većeg pravokutnika.
Koliki je opseg tako dobivenog novog pravokutnika ako je širina većeg pravokutnika četiri puta manja od njegove duljine?

Rješenje.

Duljinu preklopljenog dijela označimo s x, tada je duljina većeg pravokutnika $8x$, a duljina manjeg pravokutnika $6x$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka zaključujemo da je širina pravokutnika $2x$. 1 BOD



Iz površine preklopljenog dijela izračunajmo duljinu x:

$x \cdot 2x = 18$ 1 BOD

$x \cdot x = 9$

$x = 3$ cm . 1 BOD

Opseg je traženog pravokutnika $o = 2 \cdot 13x + 2 \cdot 2x = 30x$, 1 BOD

pa je $o = 30 \cdot 3\,cm = 90$ cm. 1 BOD

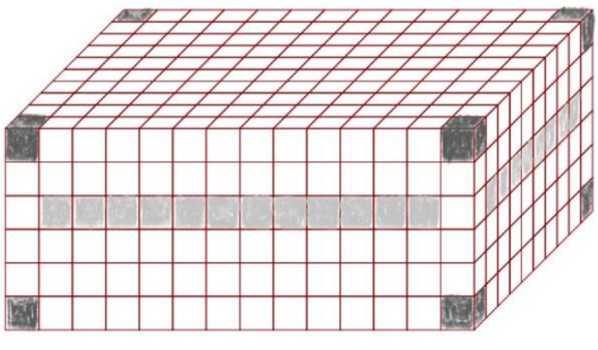
…………………………………………………………………………………...…UKUPNO 6 BODOVA

Napomena:

Ako su neki zaključci (duljine većeg i manjeg pravokutnika odnosno širina pravokutnika) vidljivi sa skice, a nisu u potpunosti iskazani riječima, treba ih bodovati s JEDNIM odnosno 2 BODA kao u prijedlogu rješenja.

6. Volumen drvenog kvadra je 840 cm^3. Duljine njegovih bridova izraženi u centimetrima su parni prirodni brojevi. Svaki je brid dulji od 2 cm. Nakon što je kvadar obojan sa svih strana, isječen je na kockice duljine brida 1 cm. Neke su strane tako dobivenih kockica obojane, a neke nisu. Koliko kockica ima neparan broj obojanih strana?

Prvo rješenje.



Iz rastava na proste faktore

$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ 1 BOD

možemo zaključiti da su duljine bridova kvadra 6 cm, 10 cm i 14 cm. 1 BOD

Nakon bojanja i rezanja kvadra na kockice duljine brida 1 cm prebrojimo kockice kojima je obojen neparan broj strana (jedna ili tri).

Tri obojene strane ima 8 kockica u vrhovima kvadra (na slici tamnosive boje). 1 BOD

Prebrojimo sada kockice kojima je obojena jedna strana.

Na svakoj se strani kvadra u vrhovima nalaze četiri kockice kojima su obojene tri strane a između njih su „rubne“ kockice kojima su obojene dvije strane. 2 BODA

Ostale kockice na toj strani kvadra imaju obojenu jednu stranu. 1 BOD

Promotrimo stranu kvadra dimenzija 14 cm x 10 cm.

Na njoj jednu obojenu stranu ima $(14-2)\cdot(10-2)=12\cdot 8=\mathbf{96}$ kockica. 1 BOD

Analogno, na strani dimenzija 10 cm x 6 cm jednu obojenu stranu ima

$(10-2)\cdot(6-2)=8\cdot 4=\mathbf{32}$ kockice. 1 BOD

Na strani dimenzija 14 cm × 6 cm jednu obojenu stranu ima

$(14-2)\cdot(6-2)=12\cdot 4=\mathbf{48}$ kockica. 1 BOD

Ukupan broj kockica s neparnim brojem obojenih strana je

$\mathbf{2}\cdot(\mathbf{96}+\mathbf{32}+\mathbf{48})+\mathbf{8}=2\cdot 176+8=\mathbf{360}$ kockica. 1 BOD

…………………………………………...………………………….……..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Iz rastava na proste faktore

$840=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ 1 BOD

možemo zaključiti da su duljine bridova kvadra 6 cm, 10 cm i 14 cm. 1 BOD

Nakon rezanja kvadra dobivamo 840 kockica s bridom duljine 1 cm.

Među njima postoje kockice kojima niti jedna strana nije obojena. Neobojene se kockice nalaze u unutrašnjosti kvadra i čine jedan manji kvadar s bridovima duljina 4 cm, 8 cm i 12 cm. 2 BODA

U tom unutarnjem kvadru je $4\cdot 8\cdot 12=\mathbf{384}$ neobojenih kockica. 1 BOD

Zaključujemo da ima $840-384=\mathbf{456}$ kockica kojima su obojene 1, 2 ili 3 strane. 1 BOD

Dvije obojene strane imaju kockice koje se nalaze uz rubove kvadra ali nisu u vrhovima kvadra. Njih ćemo prebrojati tako da broj kockica duž brida kvadra umanjimo za dvije kockice koje se nalaze u vrhovima. 1 BOD

Kako kvadar ima po 4 brida jednakih duljina, ukupan broj kockica kojima su obojene dvije strane je

$4\cdot[(6-2)+(10-2)+(14-2)]=4\cdot[4+8+12]=4\cdot 24=\mathbf{96.}$ 2 BODA

Sada zaključujemo da je ukupan broj kockica s neparnim brojem obojenih strana

$\mathbf{456}-\mathbf{96}=\mathbf{360}$. 1 BOD

…………………………………………...………………………….……..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Iz rastava na proste faktore

$840=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ 1 BOD

možemo zaključiti da su duljine bridova kvadra 6 cm, 10 cm i 14 cm. 1 BOD

Broj kockica koje imaju obojene strane možemo izračunati i pomoću površine svake strane kvadra.

Zbroj površina svih strana kvadra jednak je $2\cdot(6\cdot 10+10\cdot 14+6\cdot 14)=2\cdot 284=\mathbf{568}$ jediničnih kvadratića, što je ujedno i ukupan broj obojenih strana jediničnih kockica. 2 BODA

U vrhovima kvadra nalazi se 8 kockica kojima su obojene 3 strane pa $568-8\cdot 3=544$ obojena kvadratića pripadaju kockicama kojima su obojene 1 ili 2 strane. 1 BOD

Kockice kojima su obojene 2 strane leže duž bridova ali ne u vrhovima kvadra, pa njih ima

$4\cdot[(6-2)+(10-2)+(14-2)]=4\cdot[4+8+12]=4\cdot 24=96.$ 2 BODA

Tako saznajemo da $96\cdot 2=192$ obojena kvadratića pripadaju kockicama s parnim brojem obojenih strana. 1 BOD

Stoga preostalih $544-192=352$ obojenih kvadratića pripada kockicama kojima je obojena samo jedna strana. 1 BOD

Ukupan broj kockica s neparnim brojem obojenih strana je $352+8=\mathbf{360}$. 1 BOD

…………………………………………...………………………….……..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrto rješenje.
Iz rastava na proste faktore
$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ 1 BOD
možemo zaključiti da su duljine bridova kvadra 6 cm, 10 cm i 14 cm. 1 BOD
Neka je duljina kvadra 14 cm, širina 10 cm i visina 6 cm.
Ako kvadar razrežemo po njegovoj visini, razrezani se kvadar tada sastoji od 6 slojeva, a svaki od 14 kockica po duljini i 10 kockica po širini.
U svakom sloju nalazi se $14 \cdot 10 = 140$ kockica. 1 BOD
Promatramo **donji sloj**.
Neparni broj obojenih strana imaju 4 kockice u vrhovima kvadra (s tri obojene strane, na slici tamnosive boje) i $(14-2) \cdot (10-2) = 12 \cdot 8 = 96$ kockica u „nerubnom“ dijelu (s jednom obojenom stranom).
Ukupno je to $96 + 4 = 100$ kockica. 2 BODA
Broj i raspored obojenih kockica jednak je u gornjem i donjem sloju, pa je broj kockica s neparnim brojem obojenih strana u oba sloja $\mathbf{200.}$ 1 BOD
Promatramo **jedan od četiriju slojeva između donjeg i gornjeg**.
Od 140 kockica u tom sloju, četiri kockice na „krajevima sloja“ imaju dvije obojene strane, a kockice u unutrašnjosti nemaju nijednu. Neparan broj, odnosno jednu obojenu stranu, imaju sve kockice koje se nalaze izvana između četiriju kockica na „krajevima sloja“(na slici su to kockice svijetlosive boje).
Takvih je $2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 40$ kockica. 2 BODA
U sva četiri srednja sloja jednaki je broj kockica s neparnim brojem obojenih strana, pa u njima ukupno ima $4 \cdot 40 = \mathbf{160}$ kockica. 1 BOD
Ukupan broj kockica s neparnim brojem obojenih strana je $\mathbf{200 + 160 = 360}$. 1 BOD
……………………………………...…………………….……..….... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena:
Analogno, **ako kvadar razrežemo po njegovoj visini od 14 cm,** razrezani se kvadar tada sastoji od 14 slojeva, u kojima se nalazi po $10 \cdot 6 = 60$ kockica.
U donjem sloju neparni broj obojenih strana imaju 4 kockice u vrhovima kvadra (s tri obojene strane) i $(10-2) \cdot (6-2) = 8 \cdot 4 = 32$ kockice u „nerubnom“ dijelu (s jednom obojenom stranom).
Ukupno je to $32 + 4 = 36$ kockica. Isto vrijedi i za gornji sloj pa je broj kockica s neparnim brojem obojenih strana u oba sloja $\mathbf{72.}$
U svakom od 12 preostalih slojeva neparan broj, odnosno jednu obojenu stranu, imaju sve kockice koje se nalaze izvana između četiriju kockica na „krajevima slojeva“, a takvih je
$12 \cdot (2 \cdot 8 + 2 \cdot 4) = 12 \cdot 24 = \mathbf{288}$ kockica.
Ukupan broj kockica s neparnim brojem obojenih strana je $\mathbf{72 + 288 = 360}$.
Ili **ako kvadar razrežemo po njegovoj visini od 10 cm**, razrezani se kvadar tada sastoji od 10 slojeva, u kojima se nalazi po $14 \cdot 6 = 84$ kockice.
U donjem sloju neparni broj obojenih stana imaju 4 kockice u vrhovima kvadra (s tri obojene strane) i $(14-2) \cdot (6-2) = 12 \cdot 4 = 48$ kockica u „nerubnom“ dijelu (s jednom obojenom stranom).
Ukupno je to $48 + 4 = 52$ kockice. Isto vrijedi i za gornji sloj pa je broj kockica s neparnim brojem obojenih strana u oba sloja $\mathbf{104.}$
U svakom od 8 preostalih slojeva neparan broj, odnosno jednu obojenu stranu, imaju sve kockice koje se nalaze izvana između četiriju kockica na „krajevima slojeva“, a takvih je
$8 \cdot (2 \cdot 12 + 2 \cdot 4) = 8 \cdot 32 = \mathbf{256}$ kockica.
Ukupan broj kockica s neparnim brojem obojanih strana je $\mathbf{104 + 256 = 360}$.

7. Na koliko načina možemo ispisati riječ UTORAK od susjednih polja u tablici?
Jedan je od načina osjenčan na slici.

			K	A	K			
		K	A	R	A	K		
	K	A	R	O	R	A	K	
K	A	R	O	T	O	R	A	K
A	R	O	T	U	T	O	R	A
K	A	R	O	T	O	R	A	K
	K	A	R	O	R	A	K	
		K	A	R	A	K		
			K	A	K			

Prvo rješenje.

			K	A	K			
		K	A	R	A	K		
	K	A	R	O	R	A	K	
K	A	R	O	T	O	R	A	K
A	R	O	T	U	T	O	R	A
K	A	R	O	T	O	R	A	K
	K	A	R	O	R	A	K	
		K	A	R	A	K		
			K	A	K			

Krenimo od slova U i pomaknimo se do slova T. Prebrojimo na koliko načina možemo stići iz slova T do pojedinog istaknutog slova K. 1 BOD
Do slova K koji se nalazi u istom stupcu kao slovo T dolazimo na 1 način. 1 BOD
Od slova T do sljedećeg slova K dolazimo na 4 načina. 1 BOD
Od slova T do idućeg slova K dolazimo na 6 načina. 2 BODA
Od slova T do slova K u posljednjem stupcu dolazimo na 4 načina. 1 BOD
Iz slova T do slova K dolazimo na $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ načina. 1 BOD
Zbog simetričnosti tablice iz istog slova T do slova K u donjem dijelu tablice također dolazimo na $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ načina. 1 BOD
Možemo zaključiti da se iz slova T do slova K dolazi na ukupno $15 + 15 = 30$ načina. 1 BOD
Kako imamo 4 slova T, ukupno postoji $4 \cdot 30 = 120$ načina na koji se može ispisati riječ UTORAK.
1 BOD
…………………………………………………………………..………..….... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Peti redak i peti stupac tablice dijele tablicu na četiri simetrična dijela. 1 BOD
Prebrojat ćemo mogućnosti rješenja za četvrtinu tablice (5×5) i pomnožiti s 4.

U	T	O	R	A
T	O	R	A	K
O	R	A	K	
R	A	K		
A	K			

Krenut ćemo **desno od slova U** s 5 slova **U, T, O, R, A.**
Može se nastaviti samo dolje na K, dakle, **1 način**. 1 BOD

U	T	O	R	A
				K

Krenut ćemo **desno od slova U** s 4 slova **U, T, O, R.**
Može se nastaviti dolje na A, a iz A desno na K ili dolje na K. Dakle, **2 načina**. 1 BOD

U	T	O	R	
			A	K
			K	

U	T	O	R	
			A	K
			K	

Krenut ćemo **desno od slova U** s 3 slova **U, T i O**.
Može se nastaviti dolje na R, pa iz R vode **4 načina** (1. desno, desno, 2. desno, dolje, 3. dolje, desno, 4. dolje, dolje). 1 BOD

U	T	O		
		R	A	K
		A	K	
		K		

U	T	O		
		R	A	K
		A	K	
		K		

U	T	O		
		R	A	K
		A	K	
		K		

U	T	O		
		R	A	K
		A	K	
		K		

Krenut ćemo **desno od slova U** s 2 slova **U, T.**
Može se nastaviti dolje na O, pa iz O vodi **8 načina** (1. desno, desno, desno, 2. desno, desno, dolje, 3. desno, dolje, desno, 4. desno, dolje, dolje, 5. dolje, desno, desno, 6. dolje, desno, dolje, 7. dolje, dolje, desno, 8. dolje, dolje, dolje). 2 BODA

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

U	T			
	O	R	A	K
	R	A	K	
	A	K		
	K			

Kad krećemo iz slova **U udesno** imamo ukupno 1 + 2 + 4 + 8 = 15 načina. 1 BOD
Kad krećemo iz slova **U prema dolje** imamo 1 + 2 + 4 + 8 = 15 načina kao što je opisano u koracima ispred. 1 BOD
Ukupno imamo 2 · 15 = 30 mogućnosti (u desnom donjem dijelu tablice), 1 BOD
a sveukupno 4 · 30 = 120 načina za ispisivanje riječi UTORAK. 1 BOD
……………………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

Napomena (treće rješenje):
Cijeli postupak može se skratiti tako da se gledaju dva slova K (slovo K u kružiću i slovo K u pravokutniku) koja su simetrično smještena s obzirom na dijagonalu četvrtine tablice. 1 BOD

U	T	O	R	A
T	O	R	A	K
O	R	A	$\boxed{K}$	
R	A	$\boxed{K}$		
A	K			

Od slova U do zaokruženog slova K iznad dijagonale može se doći na 5 različitih načina. 2 BODA
Od slova U do slova K istaknutog pravokutnikom (iznad dijagonale) može se doći na 10 različitih načina. 3 BODA
U gornjem dijelu, iznad dijagonale od slova U do oba slova K može se doći na 5 + 10 = 15 različitih načina. 1 BOD
Za simetrični dio ispod dijagonale vrijedi isto, postoji 5 + 10 = 15 različitih načina. 1 BOD
Dakle, za četvrtinu tablice postoji 2 · 15 = 30 načina na koji se može ispisati riječ UTORAK. 1 BOD
Ukupno postoji 4 · 30 = 120 načina na koji se može ispisati riječ UTORAK. 1 BOD
……………………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Točan odgovor bez ikakvog obrazloženja nosi 1 BOD.
Napomena 2: Podjela tablice na 4 simetrična dijela i korištenje te simetrije u strategiji prebrojavanja nosi 2 BODA.
Napomena 3: Za pogrešno prebrojavanje načina ispisivanja riječi UTORAK u nekom dijelu rješenja, treba u tom dijelu smanjiti bodove, ali dalje primjenjivati princip „slijedi grešku“.
Napomena 4: Navođenje netočnog rješenja bez vidljive strategije ispisivanja nosi 0 BODOVA.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. veljače 2022.
7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj 15 % od $\dfrac{1+\frac{11}{24}}{\frac{5}{8}-1.5}$.

Rješenje.

Zbrajanje razlomaka u brojniku: 1 BOD

$$1+\frac{11}{24}=\frac{24+11}{24}=\frac{35}{24}$$

Oduzimanje razlomka u nazivniku: 1 BOD

$$\frac{5}{8}-1.5=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}=\frac{5-12}{8}=-\frac{7}{8}$$

Računanje dvojnog razlomka: 1 BOD

Skraćivanje u dvojnom razlomku: 1 BOD

$$\frac{\frac{35}{24}}{-\frac{7}{8}}=-\frac{35\cdot 8}{24\cdot 7}=-\frac{5}{3}$$

Pretvorba postotka u razlomak: 1 BOD

Izračun traženog postotka: 1 BOD

$$\frac{15}{100}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{4}$$

………………………………………………………..…………………… UKUPNO 6 BODOVA

2. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini zadane su točke: $A(-4,-2)$, $B(-3,1)$, $C(-2,-1)$, $D(0,-6)$ i $E(-1,1)$. Nacrtaj vektor jednak vektoru $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ tako da mu je točka E početna točka. Odredi koordinate završne točke F tako dobivenog vektora $\overrightarrow{EF}$.

Rješenje.

Crtanje točaka u koordinatnom sustavu: 1 BOD

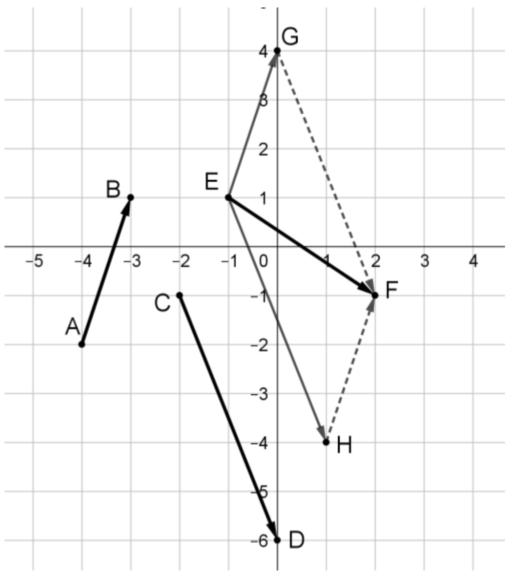
Crtanje i orijentiranje vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$: 1 BOD

Translatiranje vektora u točku E: 1 BOD

Zbrajanje vektora (po pravilu paralelograma ili trokuta): 1 BOD

Isticanje točke F na grafu: 1 BOD

Očitavanje koordinata točke $F(2,-1)$: 1 BOD



……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

3. Orač je već izorao 5 hektara i još $\frac{3}{8}$ oranice, a preostalo mu je izorati $\frac{2}{5}$ oranice i još 8 hektara. Koliko hektara ima cijela oranica? Koliko je od toga već preorano, a koliko ostaje za preorati?

Rješenje.

Ako je x površina cijele oranice, tada vrijedi:

$5+\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}x+8=x$ 2 BODA

$5+\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}x+8=x \qquad /\cdot 40$

$200+15x+16x+320=40x$

$520+31x=40x$

$31x-40x=-520$

$-9x=-520$

$-9x=-520 \qquad /:(-9)$

$x=\frac{520}{9}=57\frac{7}{9}$

Oranica ima $57\frac{7}{9}$ hektara. 2 BODA

(Postupak rješavanja jednadžbe nosi 1 BOD, a točno rješenje 1 BOD.)

Preorano je $5+\frac{3}{8}\cdot\frac{520}{9}=5+\frac{1}{1}\cdot\frac{65}{3}=5+21\frac{2}{3}=26\frac{2}{3}$ hektara. 1 BOD

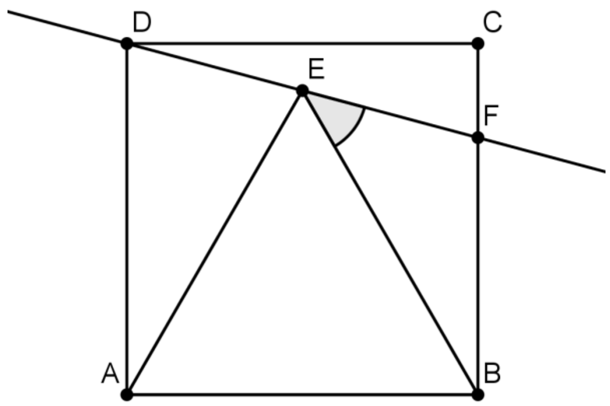
Za orati preostaje $57\frac{7}{9}-26\frac{2}{3}=31+\frac{7}{9}-\frac{6}{9}=31\frac{1}{9}$ hektara. 1 BOD

…………………………………………………………..………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenja treba bodovati kao točna i onda kada razlomak nije pretvoren u mješoviti broj.

4. Dan je kvadrat $ABCD$. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiran je jednakostranični trokut ABE, tako da se točka E nalazi unutar kvadrata. Pravac DE siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki F. Kolika je veličina kuta $\measuredangle BEF$?

Rješenje.
Skica: 1 BOD



Budući je $|AD|$ = $|AB|$ = $|AE|$, zaključujemo da je ΔAED jednakokračan.

To znači da je $|\measuredangle DEA|$ = $|\measuredangle ADE|$ 1 BOD

Nadalje,

$|\measuredangle EAD|$ = $|\measuredangle BAD|$ – $|\measuredangle BAE|$ = 90° − 60° = 30° 1 BOD

Tada iz ΔAED slijedi:

$|\measuredangle DEA|$ = (180° − 30°) : 2 = 150° : 2 = 75° 1 BOD

Točke D, E i F su na istom pravcu, pa vrijedi:

$|\measuredangle DEA| + |\measuredangle AEB| + |\measuredangle BEF|$ = 180° 1 BOD

75° + 60° + $|\measuredangle BEF|$ = 180°

$|\measuredangle BEF|$ = 180° − 135° = 45° 1 BOD

Veličina kuta $\measuredangle BEF$ je 45°.
……………………………………………………..……………………... UKUPNO 6 BODOVA

5. Pri rješavanju jednadžbe $\frac{10x+6}{5} = 3 - 1.6x$, učenik je umjesto koeficijenta 1.6 uz nepoznanicu x na desnoj strani jednadžbe napisao neki drugi broj. Na taj je način dobio za 0.1 manju vrijednost nepoznanice x u odnosu na njenu stvarnu vrijednost. Koji je broj učenik napisao umjesto koeficijenta 1.6?

Rješenje.
Najprije riješimo zadanu jednadžbu kako je napisana, da dobijemo stvarno rješenje:

$$\frac{10x + 6}{5} = 3 - 1.6x \qquad / \cdot 5$$

$10x + 6 = 15 - 8x$ 1 BOD

$10x + 8x = 15 - 6$

$18x = 9 \quad / : 18$

$x = 0.5$ 1 BOD

Učenik je dobio za 0.1 manju vrijednost, dakle $x = 0.4$. 1 BOD

Uvrstimo li to rješenje umjesto x, a umjesto broja 1.6 napišemo nepoznanicu y dobit ćemo:

$\frac{10 \cdot 0.4 + 6}{5} = 3 - y \cdot 0.4$ 1 BOD

$\frac{10}{5} = 3 - 0.4y$

$2 = 3 - 0.4y$ 1 BOD

$0.4y = 3 - 2$

$0.4y = 1 \quad / \cdot 10$

$4y = 10 \quad / : 4$

$y = 2.5$ 1 BOD

Učenik je umjesto broja 1.6 napisao broj 2.5.

………………………………………………………..……………………... UKUPNO 6 BODOVA

6. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite, a zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 5?

Rješenje.

Neka je $\overline{abcde}$ peteroznamenkasti broj sa znamenkama *a, b, c, d* i *e*.

Znamenke d i e možemo izabrati na 6 načina (mogućnosti: 5 i 0, 0 i 5, 4 i 1, 1 i 4, 3 i 2, 2 i 3).

2 BODA

Nakon toga ostale znamenke možemo izabrati na sljedeći način:

a) $\overline{abc05}$ ili $\overline{abc50}$

Znamenku a možemo izabrati na 8 načina (mogućnosti: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 i 9). 1 BOD

Znamenke b i c možemo izabrati na 7 odnosno 6 načina (10 znamenaka bez znamenaka 0, 5 i znamenke a odnosno a i b) 1 BOD

Ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika je 2 · 8 · 7 · 6 = 672. 1 BOD

b) $\overline{abc14}$ ili $\overline{abc41}$

Znamenku a možemo izabrati na 7 načina (mogućnosti: 2, 3, 5, 6, 7, 8 i 9). 1 BOD

Znamenke b i c možemo izabrati na 7 odnosno 6 načina (10 znamenaka bez znamenaka 1, 4 i znamenke a odnosno a i b) 1 BOD

Ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika je 2 · 7 · 7 · 6 = 588. 1 BOD

c) $\overline{abc23}$ ili $\overline{abc32}$

Znamenke a, b i c biraju se na isti način kao u b).

Znamenku a možemo izabrati na 7 načina (mogućnosti: 1, 4, 5, 6, 7, 8 i 9).

Znamenke b i c možemo izabrati na 7 odnosno 6 načina (10 znamenaka bez znamenaka 2, 3 i znamenke a odnosno a i b)

Ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika je 2 · 7 · 7 · 6 = 588. 1 BOD

Ukupan broj peteroznamenkastih brojeva s traženim svojstvom je 672 + 588 + 588 = 1848.

1 BOD

………………………………………………………..……………………. UKUPNO 10 BODOVA

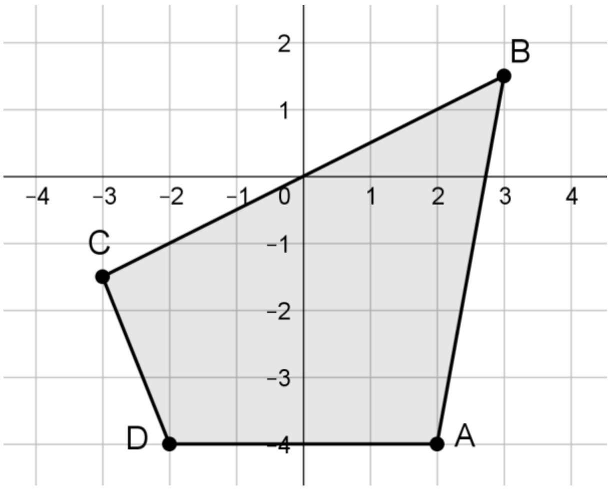
7. Zadane su točke $A\ (2, -4)$ i $B\ (3, 1.5)$. Točka C je centralno simetrična točki B s obzirom na točku $O\ (0, 0)$, dok je točka D osno simetrična točki A s obzirom na y-os. Odredi površinu četverokuta $ABCD$.

Rješenje.

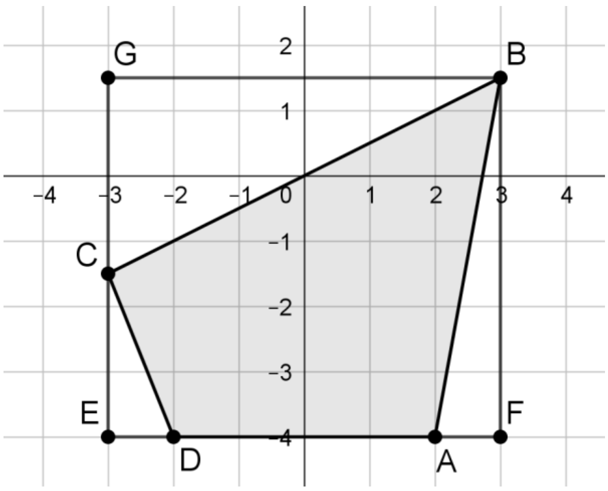
Točka C ima koordinate $C(-3, -1.5)$. 1 BOD

Točka D ima koordinate $D(-2, -4)$. 1 BOD

Skica četverokuta: 1 BOD



Četverokutu opišemo pravokutnik $EFBG$ (skica): 1 BOD



Tada je $P_{ABCD} = P_{EFBG} - P_{AFB} - P_{BGC} - P_{CED}$. 1 BOD

Duljine stranica pravokutnika $EFBG$ su $a = 6$ i $b = 5.5$.

$P_{EFBG} = a \cdot b = 6 \cdot 5.5 = 33$ 1 BOD

Duljine okomitih stranica trokuta AFB su $a = 1$ i $b = 5.5$.

$P_{AFB} = a \cdot b : 2 = 1 \cdot 5.5 : 2 = 2.75$ 1 BOD

Duljine okomitih stranica trokuta BGC su $a = 6$ i $b = 3$.

$P_{AFB} = a \cdot b : 2 = 6 \cdot 3 : 2 = 9$ 1 BOD

Duljine okomitih stranica trokuta CED su $a = 1$ i $b = 2.5$.

$P_{AFB} = a \cdot b : 2 = 1 \cdot 2.5 : 2 = 1.25$ 1 BOD

Tada je:

$P_{ABCD} = 33 - 2.75 - 9 - 1,25 = 33 - 13 = 20.$ 1 BOD

Površina četverokuta $ABCD$ iznosi 20.

…………………………………………………………..………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. veljače 2022.
8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: $143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{77}$.

Rješenje.

$143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{77}$

$= 11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 - \sqrt{11} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{11}$ 1 BOD

$= (11 \cdot 13 \cdot 7)^2 - \left(\sqrt{11} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{7}\right)^2$ 1 BOD

$= 1001^2 - \left(\sqrt{1001}\right)^2$ 1 BOD

$= 1001^2 - 1001$ 1 BOD

$= 1001 \cdot (1001 - 1)$ 1 BOD

$= 1001 \cdot 1000$

$= 1001000$ 1 BOD

…....………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

2. Dvadeset brojeva poredano je u niz. Poznato je da je svaki broj u nizu, osim prvoga, dvaput veći od broja koji je napisan neposredno prije njega. Koliko je puta zbroj prvih deset brojeva tog niza manji od zbroja posljednjih deset brojeva tog niza?

Rješenje.

Brojevi u nizu su:

$x, 2x, 2^2x, 2^3x, \ldots, 2^{18}x, 2^{19}x.$ 1 BOD

Zbroj prvih deset članova niza:

$x + 2x + 2^2x + 2^3x + 2^4x + 2^5x + 2^6x + 2^7x + 2^8x + 2^9x = x\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9)$ 1 BOD

Zbroj drugih deset članova niza:

$2^{10}x + 2^{11}x + 2^{12}x + 2^{13}x + 2^{14}x + 2^{15}x + 2^{16}x + 2^{17}x + 2^{18}x + 2^{19}x$

$= 2^{10} \cdot x\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9)$ 2 BODA

$k \cdot x\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9\,) = 2^{10} \cdot x\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9)$

$k = 2^{10}$

$k = 1024$ 2 BODA

Zbroj prvih deset brojeva tog niza je 1024 puta manji od zbroja drugih deset brojeva tog niza.

..…………………………………………………………………..……......... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Ako učenik ne izračuna da je $2^{10} = 1024$, treba dobiti (najviše) 5 BODOVA.

Napomena 2: Ako učenik računa s $x = 1$, treba mu oduzeti 1 BOD (dakle, učenik koji na taj način riješi zadatak do kraja treba dobiti 5 BODOVA).

Napomena 3: Ako učenik računa sve potencije broja 2 do potencije 2^{19} te ih potom zbraja i dijeli bez da je izlučio zajednički faktor i pritom pogriješi u računu ili ne dovrši zadatak do kraja, ukupno najviše može dobiti 3 BODA (hoće li dobiti 1, 2 ili 3 BODA, to ovisi o tome koliko je računa napravio i koliko je pritom napravio pogrešaka).

3. U posudi A se nalazi dva puta više tekućine nego u posudi B. Pritom se u posudi A nalazi homogena mješavina 90 % vode i 10 % alkohola, a u posudi B homogena mješavina 72 % vode i 28 % alkohola. Ako iz posude A prelijemo 40 % tekućine u posudu B, koliki će nakon toga biti udio alkohola u posudi B? Rješenje izrazi u postotcima.

Rješenje.
Ako u posudi B tekućine ima x (mjereno u nekim mjernim jedinicama), tada u posudi A tekućine ima (mjereno u tim istim mjernim jedinicama) $2x$.
To znači da u posudi A ima $0.9 \cdot 2x$ vode i $0.1 \cdot 2x$ alkohola, 1 BOD
a da u posudi B ima $0.72 \cdot x$ vode i $0.28 \cdot x$ alkohola. 1 BOD
Tada iz posude A prelijevamo $0.4 \cdot 0.9 \cdot 2x$ vode i $0.4 \cdot 0.1 \cdot 2x$ alkohola,
pa nakon toga u posudi B ima $0.72 \cdot x + 0.4 \cdot 0.9 \cdot 2x = 1.44\,x$ vode 1 BOD
i $0.28 \cdot x + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 2x = 0.36\,x$ alkohola. 1 BOD

Nakon prelijevanja, udio alkohola u posudi B je $\frac{0.36}{0.36+1.44} \cdot 100\,\%$, 1 BOD

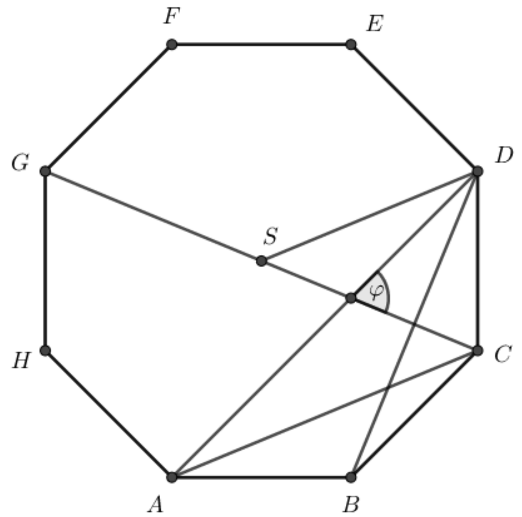
odnosno $\frac{0.36}{1.80} \cdot 100\,\% = 20\,\%$. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……....... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: S obzirom da očito udio alkohola i vode ne ovisi o tome koliki je x, ukoliko učenik od početka fiksira koliku vrijednost ima x, npr. $x = 1$ litra, zadatak treba vrednovati na isti način kao da je učenik računao s x.

4. Odredi mjeru šiljastog kuta između dijagonala $\overline{AD}$ i $\overline{CG}$ u pravilnom osmerokutu *ABCDEFGH*.

Prvo rješenje. Neka je S središte opisane kružnice pravilnom osmerokutu *ABCDEFGH*.



Skica: 1 BOD

Trokut ΔCSD je jednakokračan i $|\angle CSD| = \frac{1}{8} \cdot 360° = 45°$.
Stoga je $|\angle SCD| = |\angle SDC| = 67.5°$. 1 BOD
Trokut ΔASD je jednakokračan i $|\angle ASD| = \frac{3}{8} \cdot 360° = 135°$. 1 BOD
Stoga je $|\angle SAD| = |\angle SDA| = 22.5°$. 1 BOD
Vrijedi $|\angle ADC| = |\angle SDC| - |\angle SDA| = 67.5° - 22.5° = 45°$. 1 BOD
Konačno, koristeći činjenicu da je zbroj mjera kutova u trokutu jednak 180° računamo mjeru traženog kuta kao $180° - |\angle ADC| - |\angle SCD| = 180° - 45° - 67.5° = 67.5°$. 1 BOD

Drugo rješenje.

Skica. 1 BOD

Zbroj mjera unutarnjih kutova osmerokuta je: $(8 - 2) \cdot 180° = 1080°$.

Mjera unutarnjeg kuta pravilnog osmerokuta je: $\frac{1080°}{8} = 135°$. 1 BOD

Stoga je $|\angle CBA| = |\angle DCB| = 135°$.

Sve stranice pravilnog mnogokuta su jednake duljine. Slijedi da su trokuti ΔABC i ΔBCD sukladni (poučak S-K-S). Tada je $|AC| = |BD|$. Također, i trokuti ΔABD i ΔACD su sukladni (poučak S-S-S), pa je $|\angle BAD| = |\angle ADC|$. 1 BOD

Promotrimo četverokut $ABCD$. Zbroj mjera unutarnjih kutova četverokuta je 360°:

$$|\angle BAD| + |\angle ADC| + |\angle CBA| + |\angle DCB| = 360°.$$

Kako je $|\angle BAD| = |\angle ADC|$, onda je $|\angle ADC| = \frac{360° - (135° + 135°)}{2} = 45°$. 1 BOD

Kako je $\overline{CG}$ promjer pravilnom osmerokutu opisane kružnice, on raspolavlja kut $\angle DCB$.

Zato je $|\angle DCG| = \frac{135°}{2} = 67.5° = 67°30'$. 1 BOD

Računamo traženi kut φ između dijagonala $\overline{AD}$ i $\overline{CG}$ koristeći činjenicu da je zbroj mjera kutova u trokutu jednak 180°: $\varphi = 180° - 45° - 67°30' = 67°30'$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Umjesto korištenja sukladnost trokuta, učenici mogu zaključiti da je $ABCD$ jednakokračan trapez jer je osnosimetričan obzirom na simetralu stranice $\overline{BC}$. Taj zaključak nosi 1 BOD.

5. Je li broj $2020 \cdot 2024 - 21$ prost ili složen? Objasni!

Prvo rješenje.

$2020 \cdot 2024 - 21$

$= (2022 - 2) \cdot (2022 + 2) - 21$ 1 BOD

$= 2022^2 - 2^2 - 21$ 1 BOD

$= 2022^2 - 4 - 21$

$= 2022^2 - 25$ 1 BOD

$= 2022^2 - 5^2$

$= (2022 - 5) \cdot (2022 + 5)$ 1 BOD

$= 2017 \cdot 2027$ 1 BOD

Početni broj je složen. 1 BOD

……………………………………………………………………………........ UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

$2020 \cdot 2024 - 21$

$= (2017 + 3) \cdot (2017 + 7) - 21$ 1 BOD

$= 2017^2 + 7 \cdot 2017 + 3 \cdot 2017 + 21 - 21$ 1 BOD

$= 2017^2 + 7 \cdot 2017 + 3 \cdot 2017$ 1 BOD

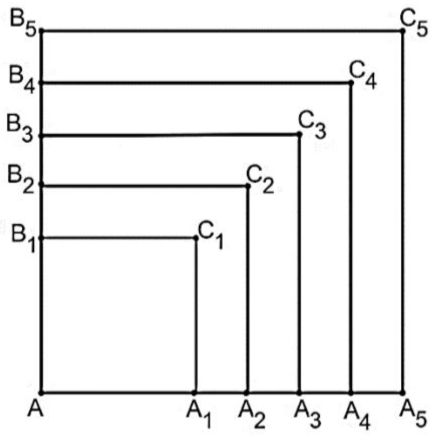
$= 2017 \cdot (2017 + 7 + 3)$ 1 BOD

$= 2017 \cdot 2027$ 1 BOD

Početni broj je složen. 1 BOD

……………………………………………………………………………........ UKUPNO 6 BODOVA

6. Marko je nacrtao kvadrat $AA_1C_1B_1$ i mnogokute $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$, $A_2A_3C_3B_3B_2C_2$, $A_3A_4C_4B_4B_3C_3$, $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ kojima su susjedne stranice međusobno okomite i pri čemu vrijedi: $|A_1A_2|=|A_2A_3|=|A_3A_4|=|A_4A_5|=|B_1B_2|=|B_2B_3|=|B_3B_4|=|B_4B_5|$ (vidi sliku).
Ako je površina mnogokuta $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ jednaka 80 m^2, a površina mnogokuta $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ jednaka 104 m^2, odredi površinu kvadrata $AA_1C_1B_1$.



Rješenje.
Označimo s x duljinu stranice kvadrata, a produljenje stranice označimo s y.
Površina mnogokuta $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ je:

$(x+y)^2 - x^2 = 80$ 1 BOD

$x^2 + 2xy + y^2 - x^2 = 80$ 1 BOD

$2xy + y^2 = 80$ (1) 1 BOD

Površina mnogokuta $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ je:

$(x+4y)^2 - (x+3y)^2 = 104$ 1 BOD

$x^2 + 8xy + 16y^2 - x^2 - 6xy - 9y^2 = 104$ 1 BOD

$2xy + 7y^2 = 104$ (2) 1 BOD

Iz (1) i (2) slijedi:

$2xy = 80 - y^2$

$80 - y^2 + 7y^2 = 104$ 1 BOD

$6y^2 = 104 - 80$

$6y^2 = 24$

$y^2 = 4$ $(y > 0)$

$y = 2$ 1 BOD

$2x \cdot 2 = 80 - 2^2$

$4x = 80 - 4$

$4x = 76$

$x = 19$ 1 BOD

Površina kvadrata $AA_1C_1B_1$ je $19^2 = 361$ m^2. 1 BOD

…………………………………………...……………………….…….….….... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Učenik može površine mnogokuta $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ i mnogokuta $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ raspisati pomoću rastava razlike kvadrata:

Površina mnogokuta $A_1A_2C_2B_2B_1C_1$ je:

$(x+y)^2 - x^2 = 80$ 1 BOD

$(x+y-x)\cdot(x+y+x) = 80$ 1 BOD

$y\cdot(2x+y) = 80$

$2xy + y^2 = 80$ (1) 1 BOD

Površina mnogokuta $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ je:

$(x+4y)^2 - (x+3y)^2 = 104$ 1 BOD

$(x+4y-x-3y)(x+4y+x+3y) = 104$

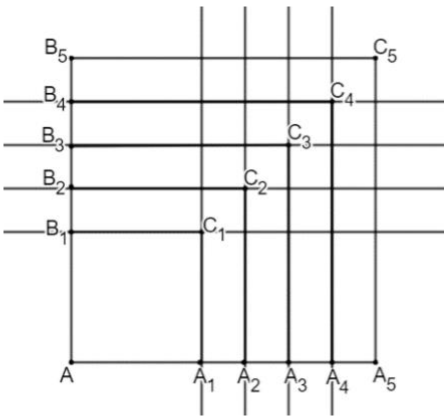
1 BOD

$y(2x+7y) = 104$

$2xy + 7y^2 = 104$ (2) 1 BOD

Dalje nastavlja na isti način kao u prethodno opisanom rješenju.

Napomena 2: Zadatak možemo riješiti i tako da kvadrat $AA_5C_5B_5$ podijelimo na kvadrate kojima je stranica duljine y i pravokutnike kojima su stranice duljine x i y, kao na slici ispod.



2 BODA

Površina mnogokuta $A_1A_2C_2B_2B_1C_1A_1$ je

$$xy + y^2 + yx = 80,$$ 1 BOD

odnosno

$$2xy + y^2 = 80.$$ 1 BOD

Površina mnogokuta $A_4A_5C_5B_5B_4C_4$ je

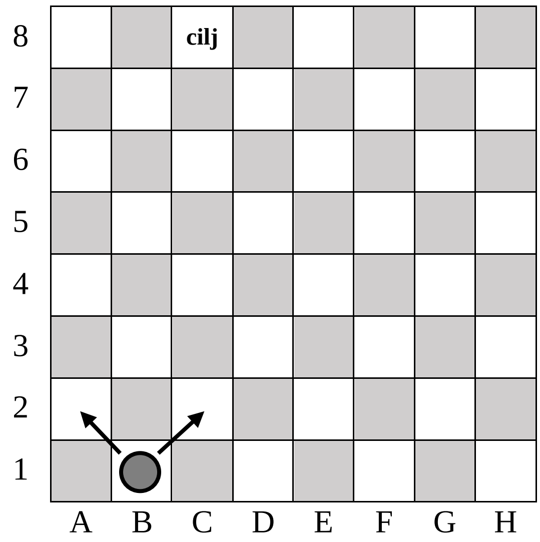
$$xy + y^2 + y^2 + y^2 + y^2 + y^2 + y^2 + y^2 + yx = 104,$$ 1 BOD

odnosno

$$2xy + 7y^2 = 104.$$ 1 BOD

Dalje rješavanje nastavljamo na isti način kao u prethodno opisanom rješenju.

7. Na polju B1 šahovske ploče nalazi se žeton. Žeton možemo pomicati za jedno polje dijagonalno, i to gore lijevo ili gore desno, ali ne smije izaći s ploče. Na koliko načina možemo žeton pomaknuti do polja C8?



Prvo rješenje.

Na slici ispod žutom bojom su obojana sva polja šahovske ploče kroz koja žeton može proći na putu od polja B1 do polja C8.

Broj upisan u žuto obojano polje kazuje na koliko načina se, krenuvši iz polja B1, žeton može pomaknuti do tog polja. Brojeve upisujemo na sljedeći način:

U polje B1 upisujemo broj 1. Dalje tablicu popunjavamo odozdo prema gore. Žeton se u neko polje šahovske ploče može pomaknuti samo iz polja koje se nalazi neposredno dolje lijevo ili dolje desno. Stoga se broj u svakom žuto obojanom polju dobije tako da se zbroje brojevi u žutim poljima koja se nalaze dijagonalno u retku ispod tog polja. 4 BODA

8			28					
7		14		14				
6	5		9		5			
5		5		4		1		
4	2		3		1			
3		2		1				
2	1		1					
1		1						
	A	B	C	D	E	F	G	H

Žeton možemo pomaknuti od polja B1 do polja C8 na 28 načina. 6 BODOVA

…………………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko učenik napravi računsku pogrešku pri zbrajanju, treba mu (za svaku pogrešku) oduzeti 1 BOD.
Napomena 2: Slično razmatranje može se provesti i unatrag, kao da promatramo žeton koji se vraća s polja C8 na B1 potezima dijagonalno prema dolje. Slika tada izgleda ovako:

8			1					
7		1		1				
6	1		2		1			
5		3		3		1		
4	3		6		4			
3		9		10				
2	9		19					
1		28						
	A	B	C	D	E	F	G	H

Drugo rješenje. Sve moguće načine pomicanja žetona ispisujemo redom tako da pri svakom mogućem grananju prvo ispisujemo putove u kojima smo krenuli lijevo, a nakon toga putove u kojima smo krenuli desno. 2 BODA

B1-A2-B3-A4-B5-A6-B7-C8
B1-A2-B3-A4-B5-C6-B7-C8
B1-A2-B3-A4-B5-C6-D7-C8
B1-A2-B3-C4-B5-A6-B7-C8
B1-A2-B3-C4-B5-C6-B7-C8
B1-A2-B3-C4-B5-C6-D7-C8
B1-A2-B3-C4-D5-C6-B7-C8
B1-A2-B3-C4-D5-C6-D7-C8
B1-A2-B3-C4-D5-E6-D7-C8
B1-C2-B3-A4-B5-A6-B7-C8
B1-C2-B3-A4-B5-C6-B7-C8
B1-C2-B3-A4-B5-C6-D7-C8
B1-C2-B3-C4-B5-A6-B7-C8
B1-C2-B3-C4-B5-C6-B7-C8
B1-C2-B3-C4-B5-C6-D7-C8
B1-C2-B3-C4-D5-C6-B7-C8
B1-C2-B3-C4-D5-C6-D7-C8
B1-C2-B3-C4-D5-E6-D7-C8
B1-C2-D3-C4-B5-A6-B7-C8
B1-C2-D3-C4-B5-C6-B7-C8
B1-C2-D3-C4-B5-C6-D7-C8
B1-C2-D3-C4-D5-C6-B7-C8
B1-C2-D3-C4-D5-C6-D7-C8
B1-C2-D3-C4-D5-E6-D7-C8
B1-C2-D3-E4-D5-C6-B7-C8
B1-C2-D3-E4-D5-C6-D7-C8
B1-C2-D3-E4-D5-E6-D7-C8
B1-C2-D3-E4-F5-E6-D7-C8

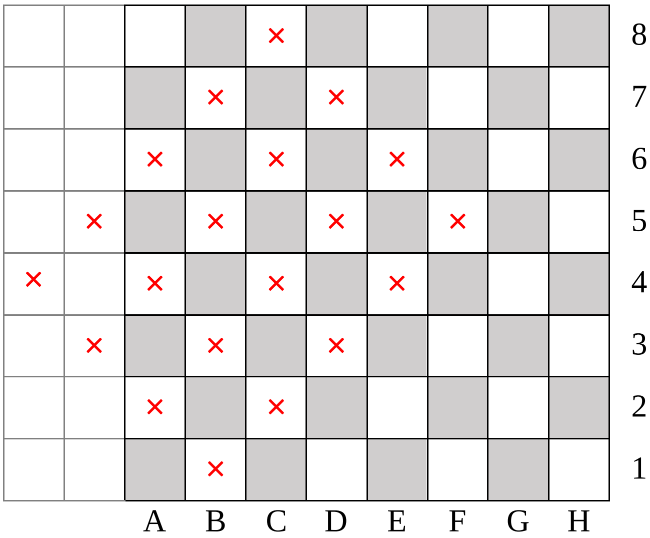
Ukupno imamo 28 načina. 8 BODOVA

Napomena: Svakih 7 točnih putova bez ponavljanja vrijedi po 2 BODA, a objašnjenje zašto nema drugih putova još 2 BODA.

Treće rješenje.
Žeton se mora pomaknuti 7 puta da bi s polja B1 došao na polje C8. Pri tom se mora 3 puta pomaknuti gore lijevo i 4 puta gore desno. 1 BOD

Zbog simetrije proširimo šahovsku ploču s lijeve strane kao na slici ispod.

Na slici su križićem označena sva polje kroz koja žeton može proći, uzimajući u obzir i ona polja koja se nalaze na proširenju ploče. 1 BOD



Od ukupnog broja svih takvih riječi oduzet ćemo broj onih riječi koje predstavljaju putove koji izlaze van šahovske ploče. 1 BOD

Putove ćemo opisivati riječima koje se sastoje od tri slova L i četiri slova D (L znači da žeton ide gore lijevo, a D da ide gore desno), npr. LLLDDDD, LLDLDDD itd. Ukupan broj riječi dobivamo tako da odredimo broj načina na koje možemo postaviti slova L: prvo slovo možemo na 7 načina, drugo na 6 načina i treće na 5 načina. Pritom ćemo svaku riječ dobiti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina različitim poretkom stavljanja slova L na ista tri mjesta, pa je broj riječi

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35.$$

3 BODA

Riječi koje predstavljaju putove koji izlaze van ploče su one koje počinju s LL ili završavaju s DDD. To su: LLLDDDD, LLDLDDD, LLDDLDD, LLDDDLD, LLDDDDL, LDLLDDD, DLLLDDD.
Ima ih ukupno 7. 3 BODA

Dakle, traženo rješenje je 35 – 7 = 28. 1 BOD
…………………………………………………………………….……..….... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik izračuna ukupan broj riječi (putova) pomoću formule za permutacije s ponavljanjem:

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 35,$$

taj dio rješenja mu se priznaje u potpunosti.