ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2017.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$12345^2 + 12353^2 - 2 \cdot 12349^2 =$

$= 12345^2 - 12349^2 + 12353^2 - 12349^2 =$ 1 BOD

$= (12345 - 12349) \cdot (12345 + 12349) + (12353 - 12349) \cdot (12353 + 12349) =$ 2 BODA

$= -4 \cdot 24694 + 4 \cdot 24702 =$ 1 BOD

$= 4 \cdot (24702 - 24694) =$ 1 BOD

$= 4 \cdot 8 = 32$ 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$12345^2 + 12353^2 - 2 \cdot 12349^2 =$

$= (12349 - 4)^2 + (12349 + 4)^2 - 2 \cdot 12349^2 =$ 2 BODA

$= 12349^2 - 2 \cdot 12349 \cdot 4 + 4^2 + 12349^2 + 2 \cdot 12349 \cdot 4 + 4^2 - 2 \cdot 12349^2 =$ 2 BODA

$= 16 + 16 = 32$ 2 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

$12345^2 = 152399025$ 1 BOD

$12353^2 = 152596609$ 1 BOD

$12349^2 = 152497801$ 1 BOD

$12345^2 + 12353^2 - 2 \cdot 12349^2 = 152399025 + 152596609 - 2 \cdot 152497801 =$ 1 BOD

$= 32$ 2 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:

$12345^2 + 12353^2 - 2 \cdot 12349^2 =$

$= 12345^2 + (12345 + 8)^2 - 2 \cdot (12345 + 4)^2 =$ 1 BOD

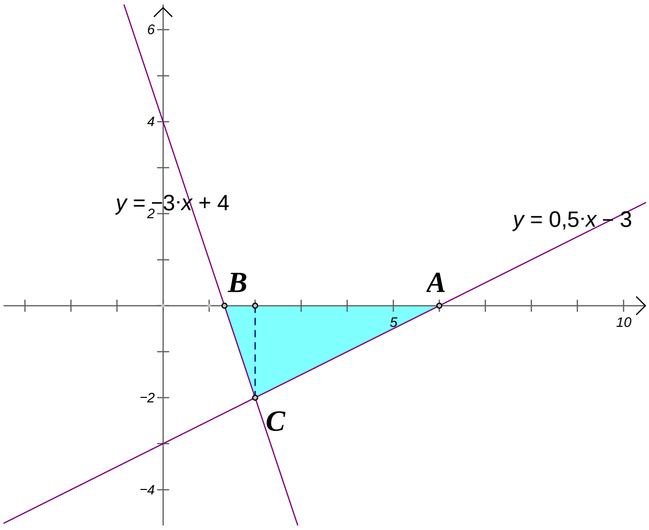
$= 12345^2 + 12345^2 + 2 \cdot 12345 \cdot 8 + 8^2 - 2 \cdot (12345^2 + 2 \cdot 12345 \cdot 4 + 4^2) =$ 2 BODA

$= 2 \cdot 12345^2 + 16 \cdot 12345 + 64 - 2 \cdot 12345^2 - 16 \cdot 12345 - 32 =$ 2 BODA

$= 64 - 32 = 32$ 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

2. Skica: 1 BOD



Odredimo sjecišta pravaca s x-osi:

$y=\frac{1}{2}x-3,\ y=0\Rightarrow x=6\ \rightarrow\ A(6,0)$ 1 BOD

$y=-3x+4,\ y=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}\ \rightarrow\ B\left(\frac{4}{3},0\right)$ 1 BOD

Odredimo duljinu stranice $\overline{AB}$:

$|AB|=6-\frac{4}{3}=\frac{18-4}{3}=\frac{14}{3}$ 1 BOD

Odredimo sjecište pravaca $y=\frac{1}{2}x-3$ i $y=-3x+4$ kako bismo odredili duljinu visine trokuta ABC na stranicu $\overline{AB}$:

$\frac{1}{2}x-3=-3x+4$

$\frac{1}{2}x+3x=3+4$

$\frac{7}{2}x=7\Rightarrow x=2$

Slijedi $y=-3x+4=-3\cdot 2+4=-6+4=-2$.

Točka C ima koordinate $C(2,–2)$, a duljina visine na stranicu $\overline{AB}$ iznosi $v = 2$. 1 BOD

Odredimo površinu trokuta ABC:

$$P_{ABC}=\frac{|AB|\cdot v}{2}=\frac{\frac{14}{3}\cdot 2}{2}=\frac{14}{3}$$

Površina trokuta ABC iznosi $P_{ABC}=\frac{14}{3}$ (kvadratnih jedinica). 1 BOD

……………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

$(9n + 4)^2 – (4 – n)^2 =$

$= 81n^2 + 72n + 16 – (16 – 8n + n^2) =$ 1 BOD

$= 81n^2 + 72n + 16 – 16 + 8n – n^2 =$ 1 BOD

$= 80n^2 + 80n$ 1 BOD

$= 80n \cdot (n + 1)$ 1 BOD

Jasno je da je izraz djeljiv s 80, a kako je izraz $n \cdot (n + 1)$ djeljiv s 2 (umnožak dva uzastopna prirodna broja djeljiv je s 2), vrijedi da je djeljiv sa 160. 2 BODA

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način

$(9n+4)^2-(4-n)^2=(9n+4-4+n)(9n+4+4-n)=$ 1 BOD

$=(9n+n)(8n+8)$ 1 BOD

$=10n\cdot 8(n+1)$ 1 BOD

$=80n(n+1)$ 1 BOD

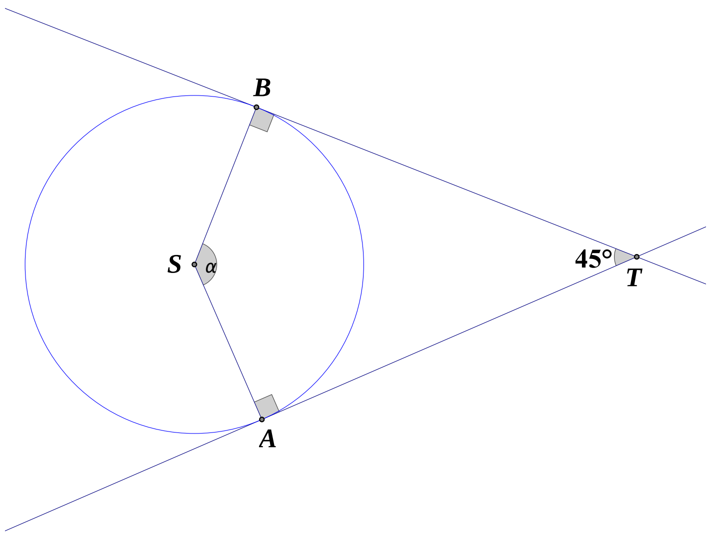
Umnožak $n\,(n + 1)$ dva uzastopna prirodna broja je uvijek paran (jer je jedan od njih sigurno paran). 1 BOD

Broj $(9n+4)^2-(4-n)^2$ je oblika $80 \cdot 2k$ ($k \in \mathbf{N}$) odnosno $160 \cdot k$ pa je zadani broj djeljiv sa 160. 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Tangente su okomite na polumjere $\overline{AS}$ i $\overline{BS}$. 1 BOD

Kutovi $\angle ASB$ i $\angle ATB$ su kutovi s okomitim kracima od kojih je jedan šiljasti a drugi tupi, pa vrijedi:

$\alpha = 180° - 45° = 135°$ 1 BOD

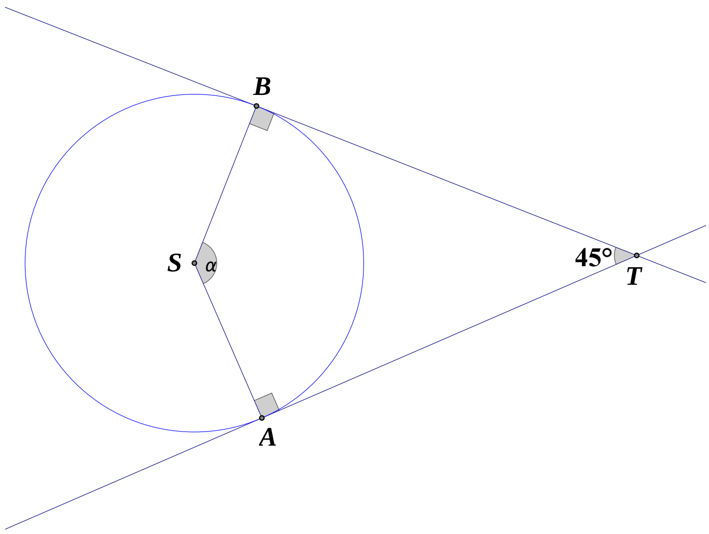
Duljinu kružnog luka računamo po formuli $l=\dfrac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}$, pa je

$l=\dfrac{4\cdot\pi\cdot 135°}{180°}=3\pi$ 2 BODA

Duljina kružnog luka koji se vidi iz točke T je $l = 3\pi$ cm. 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:
Skica: 1 BOD



Tangente su okomite na polumjere $\overline{AS}$ i $\overline{BS}$, dakle kutovi $\angle TBS$ i $\angle SAT$ su pravi. 1 BOD
Iz četverokuta *ATBS* izračuna se veličina kuta α .

$\alpha + 90° + 90° + 45° = 360°$

$\alpha + 225° = 360°$

$\alpha = 135°$ 1 BOD

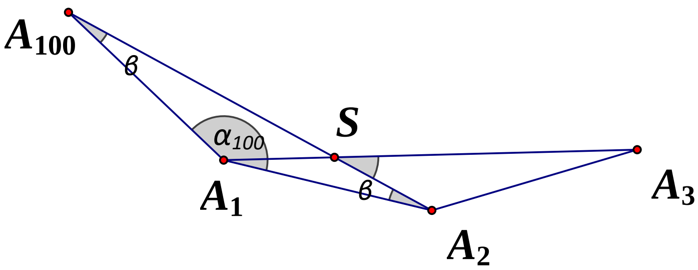
$135°$ iznosi $\frac{135°}{360°} = \frac{3}{8}$ punog kuta. 1 BOD

Duljina luka iznosi $\frac{3}{8}$ opsega kruga koji iznosi $o = 2r\pi = 2 \cdot 4 \cdot \pi = 8\pi$ cm. 1 BOD

$l = \frac{3}{8} \cdot 8\pi = 3\pi$

Duljina kružnog luka koji se vidi iz točke *T* je $l = 3\pi$ cm. 1 BOD
………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:
Skica:



Veličina jednog unutarnjeg kuta pravilnog 100-terokuta iznosi

$\alpha_{100} = \frac{(100-2) \cdot 180°}{100} = 176.4°$ 1 BOD

Trokut $\Delta A_{100}A_1A_2$ je jednakokračan. Njemu je kut α_{100} kut nasuprot osnovice.
Kutovi uz osnovicu su jednake veličine β i vrijedi $2\beta = 180° - \alpha_{100}$.
Slijedi da je $\beta = 1.8°$. 2 BODA
Analogno je, zbog jednakokračnosti trokuta $\Delta A_3A_1A_2$, kut $|\angle A_3A_1A_2| = 1.8°$. 1 BOD

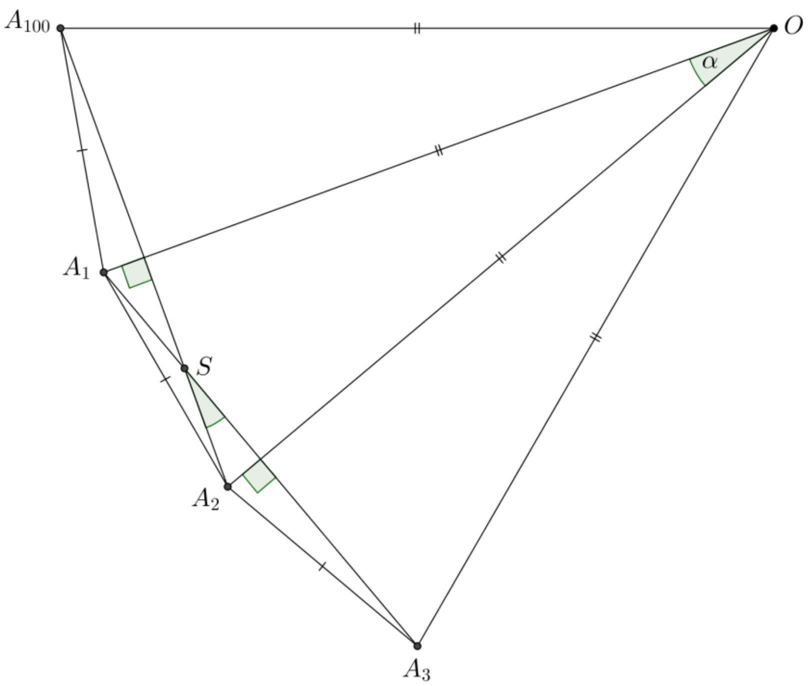
Kut $\angle A_2SA_3$ je vanjski kut trokuta ΔA_1A_2S, pa vrijedi da je on jednak zbroju dvaju unutarnjih nesusjednih kutova, tj.

$|\angle A_2SA_3| = |\angle SA_1A_2| + |\angle A_1A_2S| = 1.8° + 1.8° = 3.6°$. 2 BODA

………………………………………………………………………..… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica:



Pravilnom mnogokutu može se upisati i opisati kružnica.

Označimo s O središte pravilnom 100-terukutu opisane (i upisane) kružnice. 1 BOD

Tada je trokut A_1A_2O karakteristični trokut pravilnog 100-terukuta, a veličina kuta $\angle A_2OA_1$ iznosi

$|\angle A_2OA_1| = \dfrac{360°}{100} = 3.6°$. 1 BOD

Kako je $|A_1A_2| = |A_2A_3|$ (stranice pravilnog 100-terokuta) i $|A_1O| = |A_3O|$ (polumjer opisane kružnice), slijedi da je četverokut $A_1A_2A_3O$ deltoid.

Slično se pokaže da je i četverokut $A_{100}A_1A_2O$ deltoid. 1 BOD

Deltoid je četverokut s okomitim dijagonalama, pa vrijedi:

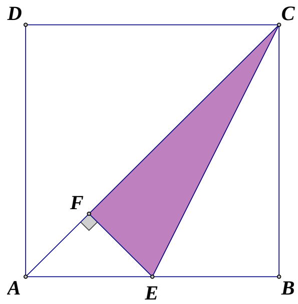
$\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2O}$ i $\overline{A_{100}A_2} \perp \overline{A_1O}$. 1 BOD

Prema tome, kutovi $\angle A_2SA_3$ i $\angle A_2OA_1$ su kutovi s okomitim kracima i vrijedi:

$|\angle A_2SA_3| = |\angle A_2OA_1| = 3.6°$. 2 BODA

………………………………………………………………………..… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Neka je a duljina stranice kvadrata *ABCD*.

Kako je točka E polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi $|AE| = \frac{a}{2}$. 1 BOD

U pravokutnom trokutu *AEF* je $|\angle FAE| = 45°$, pa je trokut *AEF* i jednakokračan. 1 BOD

Neka je $|AF| = |FE| = x$.

U trokutu *AEF* primjenom Pitagorinog poučka slijedi da je $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. 2 BODA

Duljina dijagonale kvadrata *ABCD* je $a\sqrt{2}$, tj. $|AC| = a\sqrt{2}$. 1 BOD

Nadalje je $|CF| = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. 2 BODA

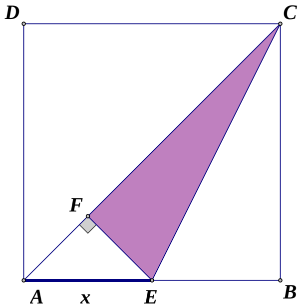
Površina pravokutnog trokuta *ECF* je $P_{EFC} = \dfrac{\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{2} = \dfrac{\frac{3}{8}a^2}{2} = \frac{3}{16}a^2$, 2 BODA

Površina kvadrata *ABCD* je a^2.

Omjer površina trokuta *ECF* i kvadrata *ABCD* je 3 : 16. 1 BOD

……………………………………………………………………….… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Neka je duljina dužine $\overline{AE}$ jednaka x.
Kutovi $\angle FAE$ i $\angle AEF$ iznose 45°. 1 BOD
Trokut *AEF* je jednakokračan i pravokutan. 1 BOD
Trokut *ABC* je jednakokračan i pravokutan. 1 BOD
Trokuti *AEF* i *ABC* su slični. 1 BOD

Duljine stranica $\overline{AE}$ i $\overline{AC}$ su u omjeru $\frac{x}{2x\sqrt{2}} = \frac{x}{2x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Koeficijent sličnosti trokuta *AEF* i *ABC* je $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1 BOD

Omjer površina trokuta *AEF* i *ABC* je kvadrat koeficijenta sličnosti tih trokuta, tj. $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$. 1 BOD

Površina trokuta *ECF* jednaka je površini trokuta *AEC* umanjenoj za površinu trokuta *AEF*.

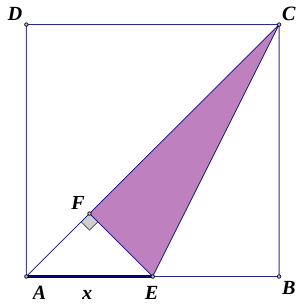
Kako je $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$, površina trokuta *AEC* je jednaka polovini površine trokuta *ABC*. 1 BOD

$P_{ECF} = P_{AEC} - P_{AEF} = \frac{1}{2}P_{ABC} - \frac{1}{8}P_{ABC} = \frac{3}{8}P_{ABC} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{3}{16}P_{ABCD}$. 2 BODA

Omjer površina trokuta *ECF* i kvadrata *ABCD* iznosi $P_{ECF} : P_{ABCD} = 3:16$. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



Neka je duljina stranice kvadrata *ABCD* jednaka $2x$

Kako je točka *E* polovište stranice $\overline{AB}$, vrijedi $|AE| = x$. 1 BOD

U pravokutnom trokutu *AEF* je $|\angle FAE| = 45°$, pa je trokut *AEF* i jednakokračan. 1 BOD

Trokut *AEF* je polovina kvadrata kojem je duljina dijagonale jednaka x, pa je

$P_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x\cdot x}{2} = \frac{x^2}{4}$. 2 BODA

Trokut *AEC* je trokut stranice duljine x i pripadne visine duljine $2x$ pa je njegova površina jednaka $P_{ABC} = \frac{x\cdot 2x}{2} = x^2$. 1 BOD

Slijedi da je $P_{ECF} = P_{AEC} - P_{AEF} = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$. 2 BODA

Površina kvadrata *ABCD* jednaka $P_{ABCD} = (2x)^2 = 4x^2$. 1 BOD

Omjer površina trokuta *ECF* i kvadrata *ABCD* iznosi

$P_{ECF} : P_{ABCD} = \frac{3}{4}x^2 : 4x^2 = \frac{3}{4} : 4 = 3:16$. 2 BODA

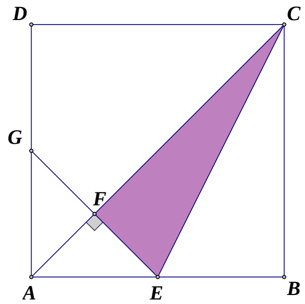
……………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Neka je *a* duljina stranice kvadrata *ABCD*.

Neka je duljina dužine $\overline{AE}$ jednaka *x*. Tada je $x = \frac{a}{2}$. 1 BOD

Kako je $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$, vrijedi $P_{AEC} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$. 2 BODA



Označimo s *G* točku simetričnu točki *E* s obzirom na pravac *AC*. 1 BOD

Tada je AEG jednakokračan pravokutan trokut, pa je $P_{AEG} = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{8}$. 2 BODA

Kako su trokuti AEF i AFG sukladni, slijedi $P_{AEF} = \frac{1}{2} P_{AEG} = \frac{a^2}{16}$. 1 BOD

Sada je $P_{ECF} = P_{AEC} - P_{AEF} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16}$. 2 BODA

Slijedi da je omjer traženih površina jednak $P_{ECF} : P_{ABCD} = \frac{3a^2}{16} : a^2 = 3:16$. 1 BOD

…….…………………………………………………………………...… UKUPNO 10 BODOVA

7. Iz druge jednadžbe je $xy = 80 - 8x + 12y$.
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo:
$x^2 + y^2 + 80 - 8x + 12y = 28$, odnosno $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 52 = 0$. 3 BODA
Zatim nadopunjavamo do potpunog kvadrata:
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 12y + 36 + 52 - 16 - 36 = 0$
$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 0$ 3 BODA
Zbroj dva kvadrata jednak je nuli ako i samo ako su oba kvadrata jednaka nuli.
Slijedi $x = 4$ i $y = -6$, 2 BODA
pa je $3x + 2y = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) = 12 - 12 = 0$. 2 BODA
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA