ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Površina je pravokutnika $\overline{3xx3}$, a duljine su njegovih susjednih stranica $\overline{xx}$ i x^2. Odredi znamenku x.

Prvo rješenje.
Duljine susjednih stranica pravokutnika su $\overline{xx}$ i x^2 pa je $x \neq 0$, tj. $x \in \{1, 2, ..., 9\}$.
Površina pravokutnika je $\overline{xx} \cdot x^2 = \overline{3xx3}$. 1 BOD
Umnožak $\overline{3xx3}$ je neparan broj pa je dovoljno promatrati $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 2 BODA
Posljednja znamenka umnoška $\overline{3xx3}$ je 3:

- Za $x = 1$ posljednja znamenka umnoška $11 \cdot 1^2$ je različita od 3 pa $x \neq 1$. 1 BOD
- Za $x = 3$ posljednja znamenka umnoška $33 \cdot 3^2$ je različita od 3 pa $x \neq 3$. 1 BOD
- Za $x = 5$ posljednja znamenka umnoška $55 \cdot 5^2$ je različita od 3 pa $x \neq 5$. 1 BOD
- Za $x = 9$ posljednja znamenka umnoška $99 \cdot 9^2$ je različita od 3 pa $x \neq 9$. 1 BOD

Provjerom $77 \cdot 49 = 3773$ 2 BODA
dobivamo rješenje $x = 7$. 1 BOD
…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Duljine susjednih stranica pravokutnika su $\overline{xx}$ i x^2 pa je $x \neq 0$, tj. $x \in \{1, 2, ..., 9\}$.
Površina pravokutnika je $\overline{xx} \cdot x^2 = \overline{3xx3}.$ 1 BOD
$(x \cdot 10 + x) \cdot x^2 = 3 \cdot 1000 + x \cdot 100 + x \cdot 10 + 3$ 2 BODA
$11x^3 = 110x + 3003$ 2 BODA
$11x^3 - 110x = 3003$
$11 \cdot (x^3 - 10x) = 11 \cdot 273$
$x^3 - 10x = 273$
$x \cdot (x^2 - 10) = 273$ 2 BODA
Rastavom broja 273 na proste faktore, $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ i provjerom, dobiva se da je $x = 7$. 3 BODA

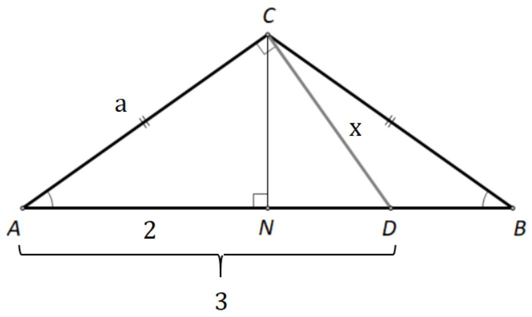
Napomena 1. Učenik može, u bilo kojem trenutku, provjeravati jednakost za svaki $x \in \{1, 2, ..., 9\}$. Kako bi mu bili dodijeljeni svi bodovi, treba provjeriti sve slučajeve ili argumentirati da, osim $x = 7$, nema drugih rješenja.

Napomena 2. Učenik može iz jednakosti $x \cdot (x^2 - 10) = 273$ (7 BODOVA) zaključiti da je $x^2 - 10 > 0$, tj. $x^2 > 10$ (1 BOD). Tada je za preostala 2 BODA dovoljno provjeriti jednakost za svaki $x \in \{4, 5, ..., 9\}$ i odrediti točno rješenje.

Napomena 3. Učenik može iz jednakosti $11x^3 = 110x + 3003$ (5 BODOVA), zaključiti da je $3113 \leq 11x^3 \leq 3993$, tj. $283 \leq x^3 \leq 363$ (3 BODA). Tada se za zaključak da je $x = 7$ jedino rješenje dodjeljuju preostala 2 BODA.
…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Zadan je tupokutan jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 4. Okomica na $\overline{AC}$ koja sadržava točku C siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki D. Ako je $|AD| = 3$, odredi $|CD|$.

Prvo rješenje.
Skica:



2 BODA

Napomena. Učeniku koji nacrta skicu s elementima koji su zadani u zadatku dodjeljuje se 1 BOD od prethodna 2 BODA. Za docrtanu visinu $\overline{CN}$ dodjeljuje se preostali 1 BOD.

Kako je $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle NAC|$ i $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle CNA|$, trokut ADC i trokut ANC su slični trokuti (KK poučak). 2 BODA

Tada su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AN|},$$

2 BODA

tj.

$$\frac{3}{a} = \frac{a}{2}$$

$$a^2 = 6.$$

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na ΔADC dobijemo:

$$3^2 = a^2 + x^2$$

1 BOD

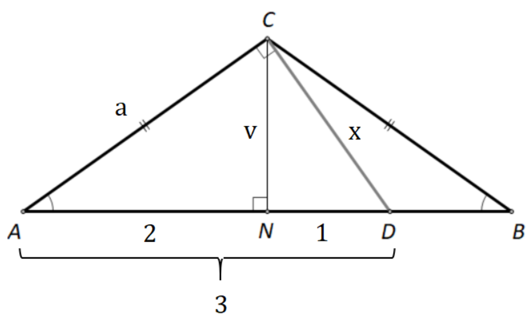
$$x^2 = 9 - 6$$

$$x = \sqrt{3}$$

1 BOD

…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Skica:



2 BODA

Napomena. Učeniku koji nacrta skicu s elementima koji su zadani u zadatku, dodjeljuje se 1 BOD od prethodna 2 BODA. Za docrtanu visinu $\overline{CN}$ dodjeljuje se preostali 1 BOD.

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ANC, CND i ADC dobivamo:

$$a^2 = 2^2 + v^2$$

1 BOD

$$x^2 = v^2 + 1^2$$

1 BOD

$$3^2 = x^2 + a^2$$

1 BOD

Eliminacijom nepoznanice v iz prve dvije jednadžbe, dobivamo

$$a^2 = x^2 + 3.$$

2 BODA

Supstitucijom $a^2 = x^2 + 3$ u jednadžbu $3^2 = x^2 + a^2$ dobivamo

$$9 = 2x^2 + 3.$$

2 BODA

Konačno,

$$2x^2 = 6$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}.$$

1 BOD

…....…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su m i n prirodni brojevi i neka m nije djeljiv s 3. Dokaži da je razlika $n^3 - m^2n$ djeljiva s 3.

Prvo rješenje.

Zapišimo zadanu razliku u obliku umnoška

$$n^3 - m^2n = n \cdot (n^2 - m^2) = n(n-m)(n+m).$$ 1 BOD

Kako broj m nije djeljiv s 3, promatramo dva slučaja: $m = 3k + 1$ i $m = 3k + 2$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$. 1 BOD

Ako je $m = 3k + 1$,

$$n(n-m)(n+m) = n(n-3k-1)(n+3k+1) = n\big((n-1)-3k\big)\big((n+1)+3k\big).$$

Brojevi $n-1, n, n+1$ su uzastopni prirodni brojevi pa je jedan od njih sigurno djeljiv s 3. 1 BOD

- Ako je n djeljiv s 3, tada je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n-1$ djeljiv s 3, tada je razlika $((n-1)-3k)$ djeljiva s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n+1$ djeljiv s 3, tada je zbroj $((n+1)+3k)$ djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 3 BODA

Ako je $m = 3k + 2$,

$$n(n-m)(n+m) = n(n-3k-2)(n+3k+2) = n\big((n-2)-3k\big)\big((n+2)+3k\big).$$

Brojevi $n-2, n, n+2$ su tri uzastopna parna ili tri uzastopna neparna broja. Jedan od njih je sigurno djeljiv s 3. 1 BOD

- Ako je n djeljiv s 3, tada je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n-2$ djeljiv s 3, tada je razlika $((n-2)-3k)$ djeljiva s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n+2$ djeljiv s 3, tada je zbroj $((n+2)+3k)$ djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 3 BODA

……………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Zapišimo zadanu razliku u obliku umnoška

$$n^3 - m^2 n = n \cdot (n^2 - m^2) = n(n-m)(n+m).$$

1 BOD

Razlika brojeva $n+m$ i n je m, što nije djeljivo s 3, pa $n+m$ i n imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Razlika brojeva n i $n-m$ je m, što nije djeljivo s 3, pa n i $n-m$ imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Razlika brojeva $n+m$ i $n-m$ je $2m$, što nije djeljivo s 3, pa $n+m$ i $n-m$ imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Brojevi $n+m, n$ i $n-m$ daju različite ostatke pri dijeljenju brojem 3. 2 BODA

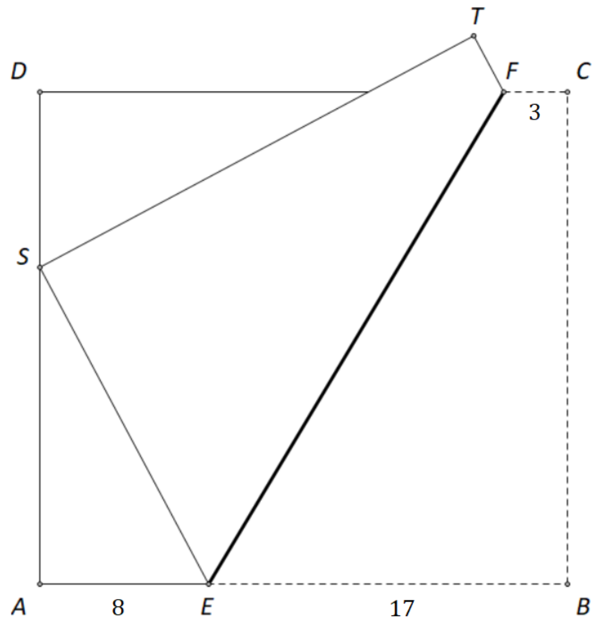
Stoga je točno jedan od njih djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 1 BOD

……………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

4. Od papira je izrezan pravokutnik $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E tako da je $|AE| = 8$ i $|BE| = 17$. Na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka F tako da je $|CF| = 3$. Nakon presavijanja papira po dužini $\overline{EF}$, vrh B poklapa se s točkom S na stranici $\overline{AD}$. Odredi duljinu stranice $\overline{BC}$ pravokutnika $ABCD$ i zapiši je u obliku neskrativog razlomka.

Prvo rješenje.

Presavijanjem papira prema uvjetima zadatka, dobiva se sljedeće:



Četverokut $EBCF$ se preslikava u njemu sukladan četverokut $SEFT$ (četverokut $SEFT$ je osnosimetrična slika četverokuta $EBCF$ s obzirom na pravac EF) tj. trokut EBF se preslikava u njemu sukladan trokut SEF, pa je

$$|SE| = |BE| = 17.$$

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut SAE dobivamo da je

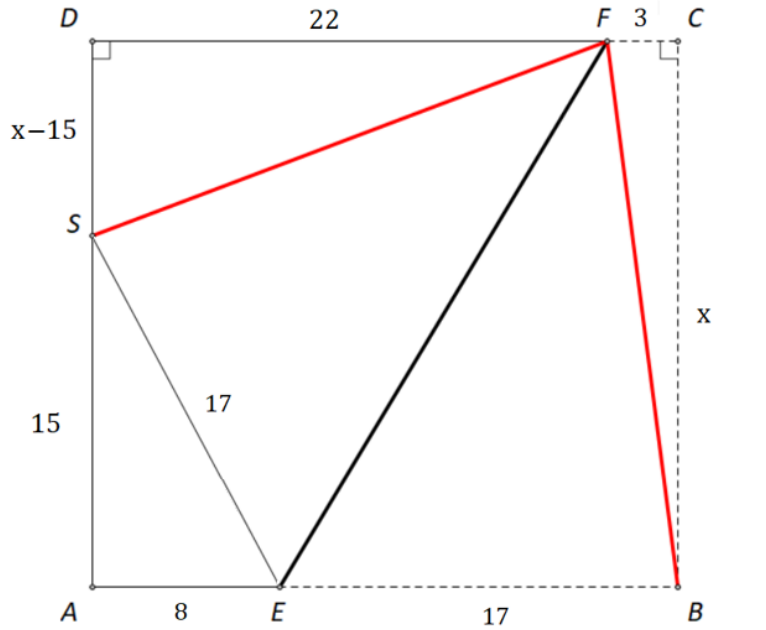
$$|SA|^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$|SA| = 15.$$

1 BOD

Neka je $|AD| = |BC| = x$.

Uočimo da je $|DS| = x - 15$ i $|DF| = 22$. 1 BOD



Kako je, zbog sukladnosti trokuta EBF i trokuta SEF, $|BF| = |SF|$, 1 BOD

primjenom Pitagorinog poučka na trokut FDS i trokut BCF dobivamo:

$$|SD|^2 + |DF|^2 = |FC|^2 + |BC|^2$$

2 BODA

$$(x - 15)^2 + 22^2 = 3^2 + x^2$$

1 BOD

$$x^2 - 30x + 225 + 484 = 9 + x^2$$

1 BOD

$$30x = 700$$

$$x = \frac{70}{3}$$

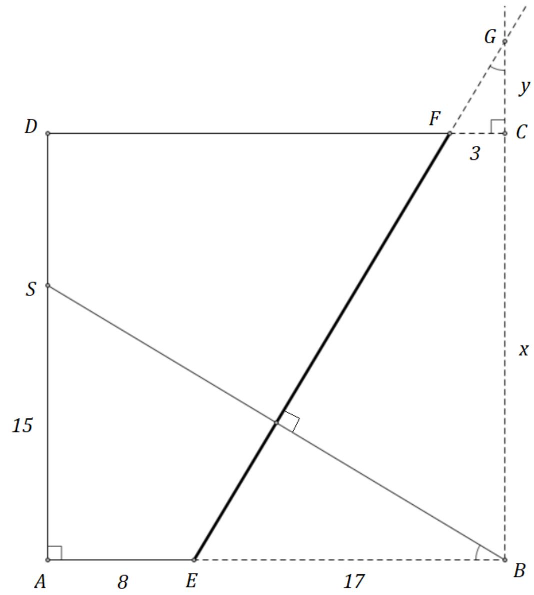
1 BOD

……………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je $|SE| = 17$ i $|SA| = 15$. 3 BODA

Neka je sjecište pravaca BC i EF točka G.



Kako je $|\measuredangle SBA| = |\measuredangle EGB|$ (kutovi s okomitim kracima) i $|\measuredangle BAS| = |\measuredangle GBE| = 90°$, trokuti ΔSAB i ΔEBG su slični (KK poučak) 1 BOD

pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|BG|}{|BE|}.$$

1 BOD

Kako je $\measuredangle EGB$ zajednički kut trokuta ΔEBG i ΔFCG te $|\measuredangle GBE| = |\measuredangle GCF| = 90°$, trokuti ΔEBG i ΔFCG su slični (KK poučak) 1 BOD

pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|BG|}{|BE|} = \frac{|CG|}{|CF|}.$$

1 BOD

Dakle, vrijedi

$$\frac{25}{15} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}.$$

Iz

$$\frac{25}{15} = \frac{y}{3}$$

dobivamo da je $y = 5$. 1 BOD

(**Napomena 1.** Umjesto da izračuna da je $y = 5$, učeniku se prethodni 1 BOD dodjeljuje i ako je iz $\frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$ zaključio da je $3x = 14y$.)

Iz

$$\frac{25}{15} = \frac{x+y}{17}$$

dobivamo da je

$$x + y = \frac{85}{3}$$

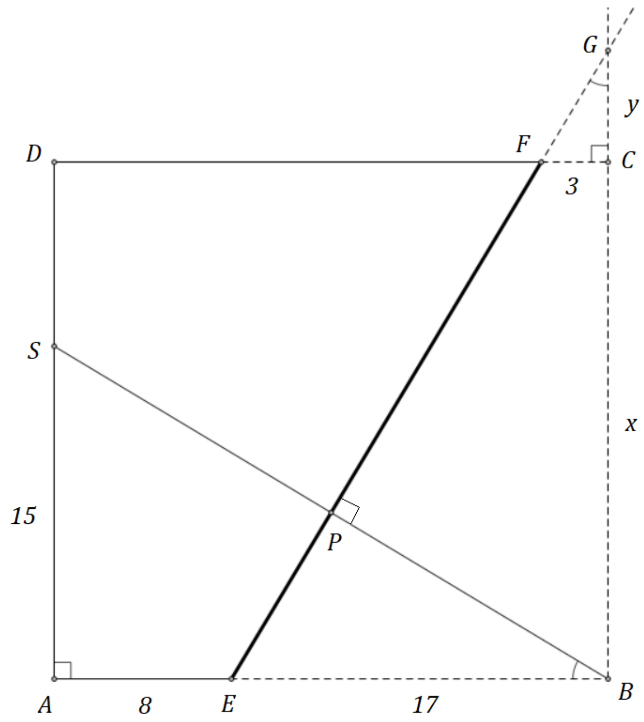
1 BOD

pa je

$$x = \frac{70}{3}$$

1 BOD

(**Napomena 2.** Učenik može uvesti točku P koja je sjecište pravaca $BS\ i\ EF$ pa umjesto sličnih trokuta $\Delta EBG,\ \Delta FCG\ i\ \Delta SAB$, kao u drugom rješenju, promatrati slične trokute $\Delta PEB,\ \Delta FCG$ i ΔSAB.



Nakon određivanja $|PB| = \frac{|SB|}{2} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$ (primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔSAB), dobiva se

$$\frac{\frac{5\sqrt{34}}{2}}{\sqrt{17^2 - \left(\frac{5\sqrt{34}}{2}\right)^2}} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$$

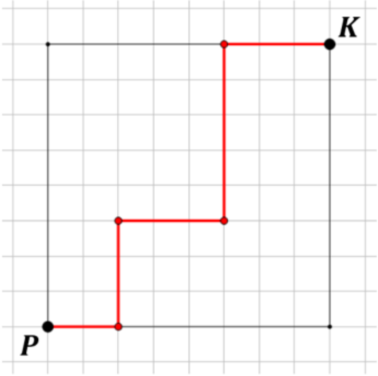
odnosno

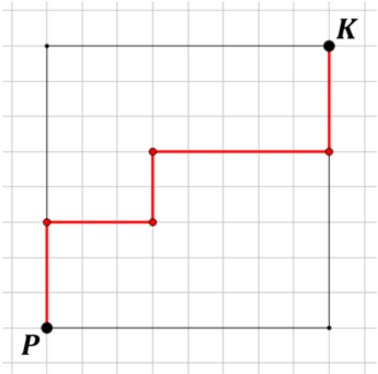
$$\frac{5}{3} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$$

Taj dio, uz analogno bodovanje međukoraka, kao i u drugom rješenju vrijedi 4 BODA.)

……………………………………………………………………..…….…... UKUPNO 10 BODOVA

5. U kvadratnoj mreži nacrtan je kvadrat sa stranicom duljine 8. Točke P i K nasuprotni su vrhovi tog kvadrata. Mrav se kreće od točke P do točke K isključivo pomacima gore ili desno po stranicama jediničnih kvadrata. Na svojemu putu mora napraviti točno četiri promjene smjera. Na slikama su prikazana dva moguća primjera dopuštenoga kretanja mrava od točke P do točke K. Na koliko različitih načina mrav može doći od točke P do točke K na opisani način?





Prvo rješenje.
Odredimo najprije broj puteva u kojima je prvi pomak desno. Budući da se putevi u kojima je prvi korak gore dobivaju na simetričan način, ukupan broj puteva ćemo dobiti množenjem dobivenog broja s 2. 1 BOD

Neka su x i y duljine prvog i drugog pomaka gore pri čemu je $x, y \in \mathbb{N}$. Duljine prvog, drugog i trećeg pomaka desno označimo sa a, b, c pri čemu je $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Tada je:

$$x + y = 8$$
$$a + b + c = 8$$

Promotrimo broj uređenih parova (x, y) i broj uređenih trojki (a, b, c) kojima se mogu opisati svi različiti načini kojima mrav može doći od točke P do točke K.

Uređeni parovi (x, y) za koje je $x + y = 8$ su (1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1).
Njihov je broj 7. 2 BODA

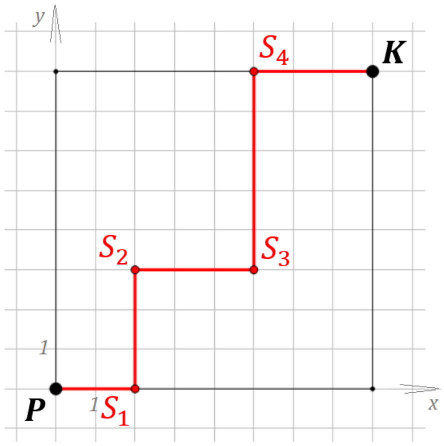
Ispišimo sva rješenja jednadžbe $a + b + c = 8$, redom, prema vrijednosti varijable a.

- Ako je $a = 1$, tada imamo 6 uređenih trojki: (1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (1,4,3), (1,5,2), (1,6,1).
- Ako je $a = 2$, tada imamo 5 uređenih trojki: (2,1,5), (2,2,4), (2,3,3), (2,4,2), (2,5,1).
- Ako je $a = 3$, tada imamo 4 uređene trojke: (3,1,4), (3,2,3), (3,3,2), (3,4,1).
- Ako je $a = 4$, tada imamo 3 uređene trojke: (4,1,3), (4,2,2), (4,3,1).
- Ako je $a = 5$, tada imamo 2 uređene trojke: (5,1,2), (5,2,1).
- Ako je $a = 6$, tada imamo 1 uređenu trojku: (6,1,1).

Takvih je uređenih trojki ukupno $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. 4 BODA

Broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K, ako je prvi pomak desno, dobit ćemo tako da pomnožimo broj uređenih parova i broj uređenih trojki 1 BOD
tj. $7 \cdot 21 = 147$. 1 BOD
Stoga je broj različitih načina na moje mrav može doći od točke P do točke K na opisani način jednak 294. 1 BOD
……………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.



Neka je točka P ishodište koordinatnog sustava, $P(0,0)$. Na svom putu do točke $K(8,8)$ mrav mora promijeniti smjer u točno 4 točke. Označimo te točke, redom, S_1, S_2, S_3 i S_4.

Odredimo najprije broj puteva u kojima je prvi pomak desno. Budući da se putevi u kojima je prvi korak gore dobivaju na simetričan način, ukupan broj puteva ćemo dobiti množenjem dobivenog broja s 2. 1 BOD

Apscise točaka $S_1(x_1, 0)$ i $S_3(x_3, y_3)$ su, tada, $1 \leq x_1 < x_3 \leq 7$ pa ih možemo odabrati na $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ različit način. 4 BODA

Točke S_1 i S_2 imaju jednake apscise, $x_1 = x_2$. Za jednom odabranu točku S_1, točki $S_2(x_2, y_2)$ ordinata je $1 \leq y_2 \leq 7$ pa se može odabrati na 7 različitih načina. 2 BODA

Za jednom odabrane točke S_1, S_2 i S_3, točka S_4 je već određena, $S_4(x_3, 8)$.

Broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K, ako je prvi pomak desno, dobit ćemo tako da pomnožimo broj odabira apscisa točaka S_1 i S_3 te broj odabira ordinate točke S_2,

1 BOD

tj.

$$7 \cdot 21 = 147.$$

1 BOD

Stoga je broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K na opisani način jednak 294. 1 BOD

Napomena. U svom razmišljanju učenik ne mora točku P smjestiti u ishodište koordinatnog sustava te ne mora kvadratnu mrežu smjestiti u koordinatni sustav kako bi, analogno, došao do istih zaključaka.
……………………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA