ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Odredi četiri najmanja uzastopna prirodna broja takva da je prvi djeljiv s 2, drugi s 3, treći sa 7, a četvrti s 5.

**Prvo rješenje.**
Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

To znači da je zadnja znamenka trećeg broja 4, a kako je djeljiv sa 7, onda to mogu biti brojevi $2 \cdot 7 = 14$, $12 \cdot 7 = 84$, $22 \cdot 7 = 154$, … 2 BODA

Naime, 10 uzastopnih višekratnika broja 7, počevši od najmanjega prirodnog, završavaju redom znamenkama 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0. 1 BOD

U tom slučaju drugi broj može biti 13, 83, 153, … 1 BOD

Najmanji među njima koji je djeljiv s 3 je broj 153. 2 BODA

Zato su traženi brojevi 152, 153, 154 i 155. 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**
Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

To znači da je zadnja znamenka trećeg broja 4, a kako je djeljiv sa 7, onda to mogu biti brojevi $2 \cdot 7 = 14$, $12 \cdot 7 = 84$, $22 \cdot 7 = 154$, … 2 BODA

Naime, 10 uzastopnih višekratnika broja 7, počevši od najmanjega prirodnog, završavaju redom znamenkama 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0. 1 BOD

Ako je treći broj 14, onda je drugi 13, ali nije djeljiv s 3. 1 BOD

Ako je treći broj 84, onda je drugi 83, ali nije djeljiv s 3. 1 BOD

Ako je treći broj 154, onda je drugi 153 i djeljiv je s 3. 1 BOD

Traženi brojevi su 152, 153, 154 i 155. 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

**Treće rješenje.**
Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

Posljednja znamenka drugog broja mora biti 3, a djeljiv je s 3. 1 BOD

Ako je drugi broj jednoznamenkast, to je broj 3. Onda bi treći broj bio 4, ali nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Ako je drugi broj dvoznamenkast, onda je oblika $\overline{a3}$ gdje je $a \in \{3, 6, 9\}$. Onda bi treći broj mogao biti 34, 64 ili 94, ali niti jedan od njih nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Ako je drugi broj troznamenkast, onda je oblika $\overline{ab3}$, gdje je $a + b$ djeljivo s 3. 1 BOD

Tražimo najmanje rješenje pa gledamo redom.

Za $a = 1$, $b = 2$, treći broj bi bio 124, ali nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Za $a = 1$, $b = 5$, treći broj bi bio 154 i djeljiv je sa 7 pa smo pronašli rješenje. 1 BOD

Traženi brojevi su 152, 153, 154, 155. 1 BOD
……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

**2.** Za koji četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ vrijedi $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2023$ ?

**Rješenje.**
$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2023$
Lijevu stranu jednakosti raspišimo u dekadskom rastavu.
$(1000a + 100b + 10c + d) + (100a + 10b + c) + (10a + b) + a = 2023$ 1 BOD

Imamo:
$1111a + 111b + 11c + d = 2023$, pri čemu su $a, b, d, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a \neq 0$. 1 BOD
Znamenka $a$ ne može biti veća od 1 jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 2023. Stoga je $a = 1$. 1 BOD

Tada je:
$1111 + 111b + 11c + d = 2023$
$111b + 11c + d = 912$

Zaključujemo da je $b < 9$ jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 999. 1 BOD

Ako je $b = 8$, slijedi:
$888 + 11c + d = 912$
$11c + d = 24$ 1 BOD

Ako je $b = 7$, slijedi:
$777 + 11c + d = 912$
$11c + d = 135$
Nemoguće, najveća je znamenka 9 pa je $11c + d$ najviše 108. Dakle, $b$ ne može biti 7 niti manje od 7. 1 BOD

To znači da je $b = 8$.
Tada je $11c + d = 24$, pa je $c \leq 2$. 1 BOD

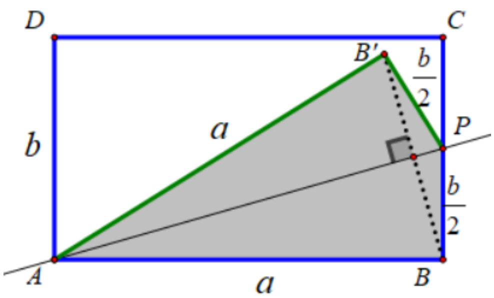
Ako je $c = 2$, onda je:
$22 + d = 24$
$d = 24 - 22$
$d = 2$ 1 BOD

Ako je $c = 1$, onda je:
$11 + d = 24$
$d = 24 - 11$
$d = 13$
Nemoguće, najveća je znamenka 9 pa je $11 + d$ najviše 20. Dakle, $d$ ne može biti 1 niti manje od 1.
1 BOD

Konačno, $a = 1$, $b = 8$, $c = 2$ i $d = 2$ pa je traženi broj 1822. 1 BOD
…………………………..…………………………………………………...….… UKUPNO 10 BODOVA

**3.** Neka je $ABCD$ pravokutnik čije su duljine stranica, izražene u centimetrima, prirodni brojevi. Točka $P$ je polovište stranice $\overline{BC}$, a točka $B'$ je osnosimetrična slika točke $B$ s obzirom na pravac $AP$. Ako opseg četverokuta $ABPB'$ iznosi 15 cm, koliko najmanje, a koliko najviše može iznositi površina pravokutnika $ABCD$?

**Rješenje.**




1 BOD

Označimo $|AB| = a$ i $|AD| = b$ pa vrijedi:

zadanom osnom simetrijom dužina $\overline{AB}$ preslika se u $\overline{AB'}$, a dužina $\overline{BP}$ preslika se u $\overline{PB'}$.

Stoga za duljine stranica četverokuta $ABPB'$ vrijedi $|AB| = |AB'| = a$ i $|BP| = |PB'| = \frac{b}{2}$. 1 BOD

Sada je:

$o_{ABPB'} = 2 \cdot a + 2 \cdot \frac{b}{2}$

$o_{ABPB'} = 2a + b$

$2a + b = 15$ 1 BOD

Kako je $b = 15 - 2a$, a $a, b \in \mathbb{N}$ onda imamo sljedeće mogućnosti:

| $a$ | $b$ | $P_{ABCD}$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 13 cm$^2$ | 1 BOD |
| 2 | 11 | 22 cm$^2$ | 1 BOD |
| 3 | 9 | 27 cm$^2$ | 1 BOD |
| 4 | 7 | **28 cm$^2$ najveća moguća površina** | 1 BOD |
| 5 | 5 | 25 cm$^2$ | 1 BOD |
| 6 | 3 | 18 cm$^2$ | 1 BOD |
| 7 | 1 | **7 cm$^2$ najmanja moguća površina** | 1 BOD |

……………………………..…………………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

**4.** Marko i Luka su se našli na početku staze duge 1800 m. Marko vozi bicikl, a Luka trči te se obojica kreću stalnim brzinama. Kad stignu do kraja staze, okreću se i bez stajanja nastavljaju u suprotnom smjeru. U 30 minuta Marko je prešao 9 km, a Luka 4.5 km. Na kojoj udaljenosti će biti jedan od drugoga 30 minuta nakon početka treninga, a na kojoj udaljenosti od početka staze su se prvi put susreli?

**Prvo rješenje.**
Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao 9000 : 1800 = 5 duljina staze.

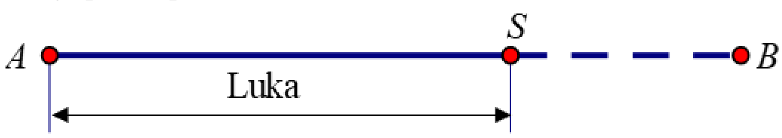
Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao 4500 : 1800 = 2.5 duljine staze. 1 BOD

Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m. 2 BODA

Za 30 minuta Marko je prešao dvostruko više od Luke i obojica se kreću stalnim brzinama. Prvi su se puta susreli kad je Luka išao prema kraju staze, a Marko se vraćao prema njenom početku. 1 BOD

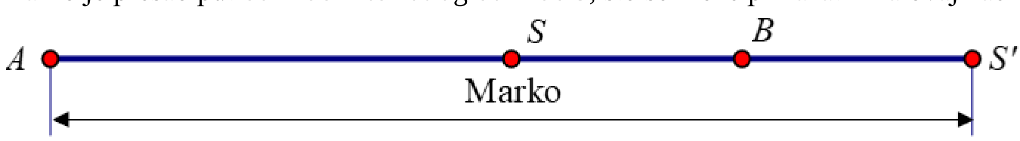
Neka je $A$ - početak staze, $B$ - kraj staze i $S$ - mjesto prvog susreta.


Prikažimo crtežom put koji je prešao svaki od njih.
Luka je prešao put od $A$ do $S$.



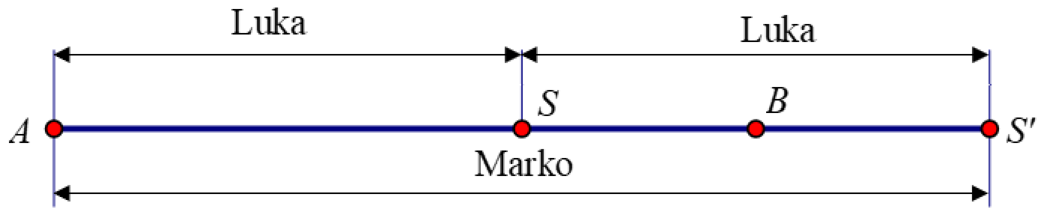

1 BOD

Marko je prešao put od $A$ do $B$ te natrag od $B$ do $S$, što se može prikazati i na ovaj način:




1 BOD

No put koji je prešao Marko je dvostruko veći, pa je put od *S* do *B* te natrag od *B* do *S* jednak putu od *A* do *S*.




1 BOD

To znači da je put od *S* do *B* jednak polovini puta od *A* do *S*, što znači da je mjesto njihovog susreta na $\frac{2}{3}$ staze.


2 BODA

Po prvi put su se susreli na $\frac{2}{3}$ od 1800 m, što je 1200 m od početka staze. 1 BOD

……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao 9000 : 1800 = 5 duljina staze.

Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao 4500 : 1800 = 2.5 duljine staze. 1 BOD

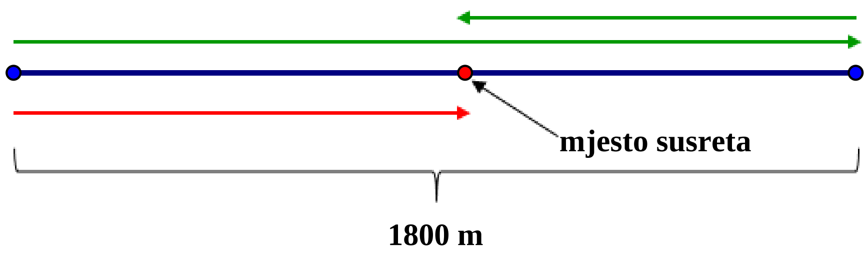
Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m. 2 BODA

Marko prijeđe stazu za 30 : 5 = 6 minuta, a Luka za 30 : 2.5 = 12 minuta.

Ako Marku treba 6 minuta za cijelu stazu od 1800 metara, onda vozi stalnom brzinom od 1800 : 6 = 300 metara u minuti. Ako Luki treba 12 minuta za tu stazu, onda trči stalnom brzinom od 1800 : 12 = 150 metara u minuti. 2 BODA

Dalje zaključujemo da je u trenutku susreta Marko na povratku prema početku staze, a Luka još trči prema kraju staze. Znači da će do točke susreta zajedno prijeći dvije duljine staze tj. 3600 m. 1 BOD
Neka je do prvog susreta prošlo *t* minuta.

Do tog trenutka Marko će prijeći put od 300*t* metara, a Luka 150*t* metara. 1 BOD



$300t + 150t = 3600$

$450t = 3600$

$t = \frac{3600}{450} = 8$

2 BODA

Po prvi put su se susreli 8 minuta nakon početka treninga i to na udaljenosti od $150 \cdot 8 = 1200$ metara od početka staze. 1 BOD

……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

**Treće rješenje.**

Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao 9000 : 1800 = 5 duljina staze.

Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao 4500 : 1800 = 2.5 duljine staze. 1 BOD

Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m. 2 BODA

Za 30 minuta Marko je prešao dvostruko više od Luke.

To znači, ako je Luka do prvog susreta prešao $x$ dijelova staze, onda je Marko prešao $2x$ dijelova staze. 1 BOD

No Marko je do prvog susreta prešao cijelu stazu i još $(1 - x)$ dijelova, tj. $1 + 1 - x = (2 - x)$ dijelova staze. 2 BODA

$2x = 2 - x$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

2 BODA

Luka je prešao $\frac{2}{3}$ staze što znači da su se po prvi put susreli na $\frac{2}{3}$ od 1800 m što je 1200 m od početka staze. 2 BODA

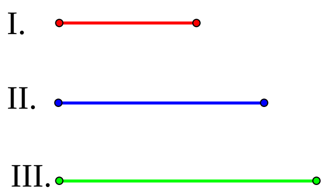
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

**5.** Nakon što je prekontrolirao karte svim putnicima u tri vagona, kondukter Mirko je zaključio: Da se u prvi vagon ukrcalo 55 putnika više, onda bi u prvom vagonu bio isti broj putnika kao u drugom i trećem zajedno. Da se u drugi vagon ukrcalo 33 putnika više, onda bi u drugom vagonu bio isti broj putnika kao u prvom i trećem zajedno. Broj putnika u prvom vagonu manji je od četvrtine broja putnika u trećem vagonu. Koliko je najviše putnika moglo biti u ta tri vagona?

**Prvo rješenje.**

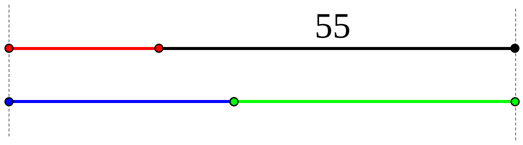
Očito je broj putnika u 1. vagonu manji od broja putnika u drugom vagonu.

Prikažimo grafički broj putnika u 1., 2. i 3. vagonu pri čemu uočimo da je za taj prikaz svejedno je li broj putnika u 3. vagonu veći ili manji od broja putnika u većem od preostala dva.

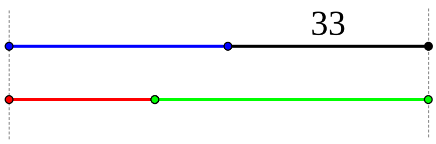



1 BOD

U skladu s oznakama vrijedi:

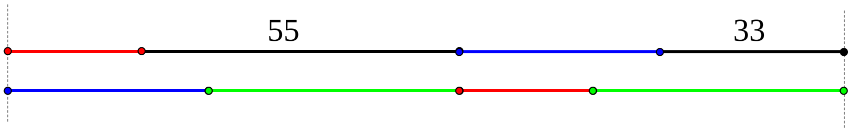



i



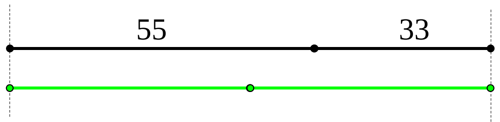

2 BODA

To znači da je:

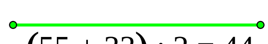



1 BOD

iz čega se dobije:



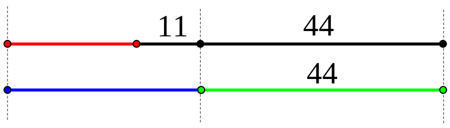

, odnosno



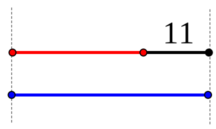
$(55+33):2=44$

U trećem vagonu bilo je 44 putnika. 2 BODA

Sada dobijemo:




, odnosno




1 BOD

Kako je broj putnika u prvom vagonu manji od $\frac{1}{4}$ od 44, što je 11, zaključujemo da je u prvom vagonu najviše 10 putnika. 1 BOD

To znači da je u 2. vagonu najviše 10 + 11 = 21 putnik. 1 BOD

U ta tri vagona moglo je biti najviše 44 + 21 + 10 = 75 putnika. 1 BOD

……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Očito je broj putnika u 1. vagonu manji od broja putnika u drugom vagonu.

Označimo s $x$, $y$, $z$ redom broj putnika u 1., 2. i 3. vagonu pri čemu uočimo da je za taj prikaz svejedno je li broj putnika u 3. vagonu veći ili manji od broja putnika u većem od preostala dva. 1 BOD

Sada vrijedi:

$x + 55 = y + z$

$y + 33 = x + z$, $y > x$. 2 BODA

Zbrajanjem ovih jednakosti dobijemo:
$x + 55 + y + 33 = y + z + x + z$, $y > x$. 1 BOD

Odavde je $88 = 2 \cdot z$, pa je $z = 44$.
U trećem je vagonu bilo 44 putnika. 2 BODA

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu dobijemo:
$x + 55 = y + 44$, $y > x$.

To možemo zapisati na način:
$x + 11 + 44 = y + 44$, $y > x$, odnosno $x + 11 = y$, $y > x$. 1 BOD

Kako je broj putnika u prvom vagonu manji od $\frac{1}{4}$ od 44, što je 11, zaključujemo da je $x < 11$ pa je najveća moguća vrijednost $x = 10$. 1 BOD

Onda je najveća moguća vrijednost za $y$ jednaka $10 + 11 = 21$. 1 BOD

U ta tri vagona moglo je biti najviše $44 + 21 + 10 = 75$ putnika. 1 BOD
………………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA