ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\frac{5}{8}:\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)=1.25:\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{5}{8}\cdot\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)=1.25\cdot\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)$$ 1 BOD

$$\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{19}{5}-\frac{9}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}-2-\frac{1}{2}x\right)$$ 1 BOD

$$\frac{19}{8}-\frac{45}{32}x+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-\frac{5}{8}x\ /\cdot 32$$ 1 BOD

$76-45x+10=16-80-20x$ 1 BOD

$-45x+20x=16-80-76-10$

$-25x=-150/:(-25)$ 1 BOD

$x=6$ 1 BOD

…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\frac{5}{8}:\left(0.4-2-\frac{1}{2}x\right)=1.25:\left(3.8-2\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{2}\right)$$

$0.625:(0.4-2-0.5x)=1.25:(3.8-2.25\cdot x+0.5)$

$0.625\cdot(3.8-2.25\cdot x+0.5)=1.25\cdot(0.4-2-0.5x)$ 1 BOD

$2.375 - 1.40625x + 0.3125 = 0.5 - 2.5 - 0.625\, x$ 1 BOD

$2.6875 - 1.40625x = -2 - 0.625x$ 1 BOD

$-1.40625x + 0.625x = -2 - 2.6875$ 1 BOD

$-0.78125x = -4.6875$ 1 BOD

$x = 6$ 1 BOD

…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka je k oznaka za karamelu, p oznaka za čokoladnu puslicu i g oznaka za gumeni bombon.
Zadatak je moguće riješiti ispisivanjem šesteročlanih skupova oblika $\{k,p,g,-,-,-\}$.
Na mjesta na kojima nedostaju članovi treba smjestiti sljedeće podskupove:

$\{k,k,k\}$, $\{p,p,p\}$, $\{g,g,g\}$ 1 BOD

$\{k,k,p\}$, $\{k,k,g\}$ 1 BOD

$\{p,p,k\}$, $\{p,p,g\}$ 1 BOD

$\{g,g,k\}$, $\{g,g,p\}$ 1 BOD

$\{k,p,g\}$ 1 BOD

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…...…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko se nabrajaju šestorke (bez obzira na poredak članova) bodovati treba kao što je predloženo. Za tri šestorke 1 bod, za pet šestorki 2 boda, za sedam šestorki 3 boda, za devet šestorki 4 boda, za 10 šestorki 5 bodova. Točan odgovor nosi 1 bod. Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

Drugi način:

Neka je k oznaka za karamelu, p oznaka za čokoladnu puslicu i g oznaka za gumeni bombon.
Traženi broj različitih vrećica jednak je broju uređenih trojki (k, p, g) takvih da je $k + p + g = 6$. 1 BOD

Postoje tri skupa brojeva koji zadovoljavaju uvjete $\{2,2,2\}$, $\{1,2,3\}$ i $\{1,1,4\}$. 1 BOD

Uređene trojke, koje se mogu složiti od članova navedenih skupova, su

(2, 2, 2) − 2 karamele, 2 puslice, 2 gumena bombona, 1 BOD

(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4) 1 BOD

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) 1 BOD

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…...…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

Treći način:

Rješenja ispisujemo u tablicu:

Broj karamela	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
Broj puslica	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
Broj gumenih bombona	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

Svake dvije točne „kombinacije“ donose po 1 bod.

Može se složiti 10 različitih vrećica s bombonima. 1 BOD

…...…………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za rješenja koja su ponovljena oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka 2 ponovljena oduzima 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Budući da je aritmetička sredina brojeva x, y, z, p i q jednaka a, vrijedi $\frac{x+y+z+p+q}{5}=a$

odnosno $x+y+z+p+q=5a$. 1 BOD

Aritmetička sredina zadanih brojeva je

$$\frac{x+2y-3+y+2z-1+z+2p+p+2q+1+q+2x+3}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3x+3y+3z+3p+3q}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3(x+y+z+p+q)}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3\cdot 5a}{5}=3a.$$ 2 BODA

..……………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Aritmetička sredina brojeva x, y, z, p i q jednaka je a pa vrijedi $\frac{x+y+z+p+q}{5}=a$. 1 BOD

Aritmetička sredina zadanih brojeva je

$$\frac{x+2y-3+y+2z-1+z+2p+p+2q+1+q+2x+3}{5}=$$ 1 BOD

$$=\frac{3x+3y+3z+3p+3q}{5}=$$ 1 BOD

$= \dfrac{3(x+y+z+p+q)}{5} =$ 1 BOD

$= 3 \cdot \dfrac{x+y+z+p+q}{5} = 3 \cdot a = 3a.$ 2 BODA

………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a C ukupan broj crvenih kuglica nakon dodavanja potrebnog broja crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica u kutiji prije dodavanja crvenih kuglica vrijedi da je

$p : c = 3 : 7$ odnosno $p = \dfrac{3}{7}c$. 1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : C = 5 : 14$ odnosno $p = \dfrac{5}{14}C$. 1 BOD

Dalje slijedi da je $\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}C \longrightarrow C = \dfrac{6}{5}c.$ 2 BODA

Budući da je $C = \dfrac{6}{5}c = \dfrac{120}{100}c = 120\,\%\, c$, novi broj crvenih kuglica iznosi 120 % početnog broja crvenih kuglica. 1 BOD

Broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a x broj dodanih crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica na početku vrijedi da je $p : c = 3 : 7$ odnosno $p = \dfrac{3}{7}c$.

1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : (c + x) = 5 : 14$ odnosno $p = \dfrac{5}{14}(c+x)$. 1 BOD

Dalje slijedi da je $\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}(c+x)$

$$\dfrac{3}{7}c = \dfrac{5}{14}c + \dfrac{5}{14}x \;/\cdot 14$$

$$6c = 5c + 5x$$

$$x = \dfrac{1}{5}c$$

2 BODA

Budući da je $x = \dfrac{1}{5}c = \dfrac{20}{100}c = 20\%c$, 1 BOD

broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Neka je p ukupan broj plavih kuglica u kutiji, c ukupan broj crvenih kuglica prije dodavanja, a x broj dodanih crvenih kuglica.

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica na početku vrijedi da je $p : c = 3 : 7$ odnosno postoji racionalan broj m takav da je $p = 3m$ i $c = 7m$. 1 BOD

Zbog odnosa broja plavih i crvenih kuglica nakon dodavanja određenog broja crvenih kuglica vrijedi da je $p : (c + x) = 5 : 14$ odnosno postoji racionalan broj n takav da je $p = 5n$ i $c + x = 14n$.

1 BOD

Dalje slijedi da je $3m = 5n$ odnosno $m = \frac{5}{3}n$. 1 BOD

Vrijedi $c = 7 \cdot m = 7 \cdot \frac{5}{3}n = \frac{35}{3}n$ pa je $\frac{c+x}{c} = \frac{14n}{\frac{35}{3}n} = \frac{6}{5}$. 2 BODA

Dakle, $x = \frac{1}{5}c = \frac{20}{100}c = 20\%c$.

Broj crvenih kuglica potrebno je povećati za 20%. 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

$S_{2015} = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2013 - 2014) + 2015 = (2014 : 2) \cdot (-1) + 2015 = -1007 + 2015 =$
$= 1008$ 3 BODA

$S_{2016} = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2015 - 2016) = (2016 : 2) \cdot (-1) = -1008$ 2 BODA

$S_{2015} + S_{2016} = 1008 + (-1008) = 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$S_{2015} + S_{2016} =$

$= (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2013 - 2014) + 2015 + (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2015 - 2016) =$

$= -1 \cdot 1007 + 2015 + (-1) \cdot 1008 =$ 3 BODA

$= -1007 + 2015 - 1008 =$ 1 BOD

$= -2015 + 2015 =$ 1 BOD

$= 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

$S_{2015} = (1 + 3 + 5 + \ldots + 2013 + 2015) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2012 + 2014) =$

$= \frac{(1+2015)\cdot 1008}{2} - \frac{(2+2014)\cdot 1007}{2} = 1008 \cdot 1008 - 1008 \cdot 1007 = 1008$ 3 BODA

$S_{2016} = (1 + 3 + 5 + \ldots + 2013 + 2015) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2014 + 2016) =$

$= \frac{(1+2015)\cdot 1008}{2} - \frac{(2+2016)\cdot 1007}{2} = 1008 \cdot 1008 - 1009 \cdot 1008 = -1008$ 2 BODA

$S_{2015} + S_{2016} = 1008 - 1008 = 0$ 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Ako se broj sličica koje ima Darko označi s x, onda Branko ima $\frac{3}{5}x$ sličica. 1 BOD

Kad bi Branko dao 150 sličica Darku, onda bi Darko imao $x + 150$ sličica, a Branku bi ostalo $\frac{3}{5}x - 150$ sličica. 2 BODA

Darko bi tada imao 3 puta više od Branka pa vrijedi jednadžba $3 \cdot \left(\frac{3}{5}x - 150\right) = x + 150$. 1 BOD

$\frac{9}{5}x-450=x+150$

$\frac{4}{5}x=600$ 2 BODA

$x=750$

Darko ima 750 sličica, a Branko $\frac{3}{5}\cdot 750=450$. 1 BOD

Antun ima 80% više od Branka pa vrijedi 1.8 · 450 = 810. 2 BODA

Zajedno imaju 750 + 450 + 810 = 2010 sličica. 1 BOD

…..……………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kada bi Branko dao Darku 150 sličica, onda bi Darko imao tri puta više sličica od Branka.

Ako bi Branko tada imao x, onda bi Darko tada imao $3x$. 1 BOD

Ako Darko vrati Branku 150 sličica, onda Branko ima $x + 150$, a Darko $3x - 150$. Vrijedi

jednadžba $\frac{3}{5}\cdot(3x-150)=x+150$ 2 BODA

$\frac{9}{5}x-90=x+150$

$\frac{4}{5}x=240$ 2 BODA

$x=300$

Branko ima $x + 150 = 300 + 150 = 450$. 1 BOD

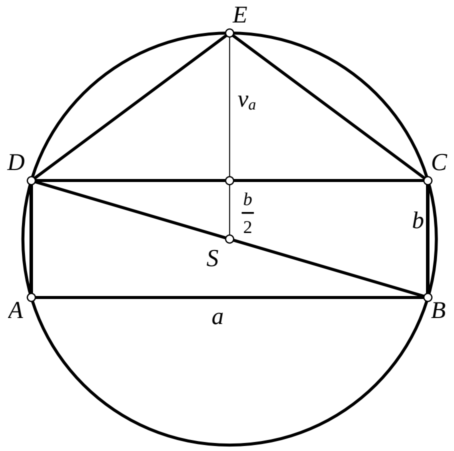
Darko ima $3x - 150 = 3 \cdot 300 - 150 = 750$. 1 BOD

Antun ima 80% više od Branka pa vrijedi 1.8 · 450 = 810. 2 BODA

Zajedno imaju 750 + 450 + 810 = 2010 sličica. 1 BOD

…..……………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



1 BOD

Neka je $|AB|=|CD|=a$, $|BC|=|AD|=b$ i neka je v_a duljina visine na osnovicu trokuta DCE.

Duljina polumjera kružnice opisane pravokutniku je $r=20:2=10$ cm. 1 BOD

Trokut DCE je jednakokračan s osnovicom $\overline{DC}$ pa vrijedi $|SE|=r=v_a+\frac{b}{2}$. 1 BOD

Dalje je $\frac{b}{2}+v_a=10$ odnosno $v_a=10-\frac{b}{2}$. 1 BOD

Iz jednakosti površina pravokutnika $ABCD$ i trokuta DCE slijedi

$ab=\frac{1}{2}av_a \Rightarrow b=\frac{1}{2}v_a \Rightarrow v_a=2b$. 2 BODA

Vrijedi jednadžba $2b = 10 - \frac{b}{2} \; / \cdot 2$ 1 BOD

$4b = 20 - b$

$5b = 20$ 2 BODA

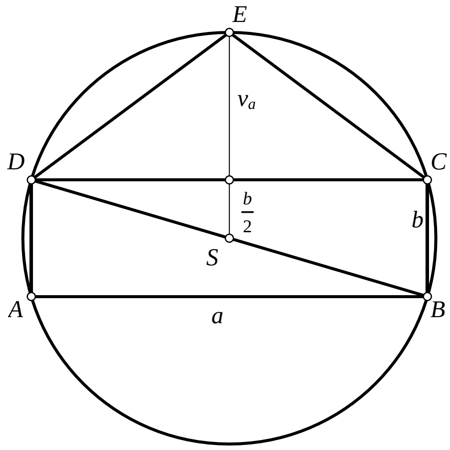
$b = 4$

Dakle, $|AD| = 4$ cm. 1 BOD

…..………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Pogođeno (izmjereno) rješenje bez postupka vrijedi 2 boda.

Drugi način:



1 BOD

Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ i neka je v_a duljina visine na osnovicu trokuta *DCE*.

Duljina polumjera kružnice opisane pravokutniku je $r = 20 : 2 = 10$ cm. 1 BOD

Trokut *DCE* je jednakokračan s osnovicom $\overline{DC}$ pa vrijedi $|SE| = r = v_a + \frac{b}{2}$. 1 BOD

Dalje je $\frac{b}{2} + v_a = 10$ odnosno $v_a = 10 - \frac{b}{2}$. 1 BOD

Iz jednakosti površina pravokutnika *ABCD* i trokuta *DCE* slijedi

$ab = \frac{1}{2} a v_a \Rightarrow ab = \frac{1}{2} a \cdot \left(10 - \frac{b}{2}\right)$ 2 BODA

$ab = 5a - \frac{ab}{4}$ 1 BOD

$\frac{5}{4} ab = 5a$ 1 BOD

$\frac{1}{4} b = 1 \quad \Rightarrow b = 4$ cm 2 BODA

…..………………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Pogođeno (izmjereno) rješenje bez postupka vrijedi 2 boda.