ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8. 1 BOD

Kako je znamenka stotica jednaka 0, broj $\overline{4y}$ mora biti djeljiv s 8, pa y može biti jedino 0 ili 8. 1 BOD

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, 1 BOD

tj. broj $x + 0 + 4 + y$ mora biti djeljiv s 9. 1 BOD

Dakle, ako je $y = 0$ onda je $x = 5$, što daje rješenje 5040, 1 BOD

a ako je $y = 8$ onda je $x = 6$, što daje rješenje 6048. 1 BOD

…………………………………………..…………………………….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik odredi brojeve bez pravila za djeljivost i postupka, za svako rješenje dobiva jedan bod, što znači da ukoliko nema postupka učenik može dobiti najviše 2 BODA.

Drugi način:

Ako je broj djeljiv brojevima 8 i 9, onda je djeljiv i brojem 72 (njihovim najmanjim zajedničkim višekratnikom). 1 BOD

Treba ispitati djeljivost četveroznamenkastih brojeva 1040, 2040, 3040, 4040, 5040, 6040, 7040, 8040 i 9040 brojem 72.

1040 : 72 = 14
320
32

Brojevi 1008 i 1080 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.

2040 : 72 = 28
600
24

Brojevi 2016 i 2088 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.

3040 : 72 = 42
160
16

Brojevi 3024 i 3096 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.

4040 : 72 = 56
440
8

Broj 4032 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.

5040 : 72 = 70
00

Broj 5040 je djeljiv sa 72 i ima traženi oblik.

6040 : 72 = 83 **Broj 6048 je djeljiv sa 72 i ima traženi oblik.**
280
64

7040 : 72 = 97 Broj 7056 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.
560
56

8040 : 72 = 111 Broj 8064 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.
84
120
48

9040 : 72 = 125 Brojevi 9000 i 9072 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.
184
400
40

Provjeravanje djeljivosti brojem 72 svih predloženih brojeva treba bodovati s 3 BODA (1 BOD za tri broja).

Višekratnici broja 72 traženog oblika su 5040 i 6048, odnosno nepoznate znamenke su $x = 5$, $y = 0$ (prvo rješenje) i $x = 6$, $y = 8$ (drugo rješenje). 2 BODA

…………………………………………..…………………………..... UKUPNO 6 BODOVA

2. $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \ldots + (25 + 26) =$ 1 BOD
$= 25 \cdot 51 = 1275$ 1 BOD
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 = 32 \cdot 63 = 2016$ 2 BODA

Treba usporediti razlomke $\frac{1275}{2018}$ i $\frac{1275}{2016}$.

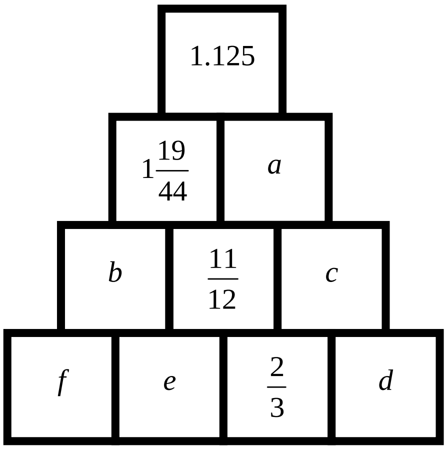
Razlomci imaju jednake brojnike pa je veći onaj koji ima manji nazivnik. 1 BOD

Kako je 2018 > 2016, onda je

$\frac{1275}{2018} < \frac{1275}{2016}$. 1 BOD

…………………………………………..……………………..…….... UKUPNO 6 BODOVA

3. Označimo nepoznate brojeve s *a, b, c, d, e, f*.



Tada je:

$1.125 = 1\frac{19}{44} \cdot a$

$a = \frac{9}{8} : \frac{63}{44}$

$a = \frac{9}{8} \cdot \frac{44}{63}$

$a = \frac{11}{14}$

$b : \frac{11}{12} = \frac{63}{44}$

$b = \frac{63}{44} \cdot \frac{11}{12}$

$b = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}$

$\frac{11}{12} : c = \frac{11}{14}$

$c = \frac{11}{12} : \frac{11}{14}$

$c = \frac{11}{12} \cdot \frac{14}{11}$

$c = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} + d = 1\frac{1}{6}$

$d = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}$

$d = \frac{7}{6} - \frac{4}{6}$

$d = \frac{1}{2}$

$e + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$

$e = \frac{11}{12} - \frac{2}{3}$

$e = \frac{11}{12} - \frac{8}{12}$

$e = \frac{1}{4}$

$f + \frac{1}{4} = 1\frac{5}{16}$

$f = 1\frac{5}{16} - \frac{1}{4}$

$f = 1\frac{5}{16} - \frac{4}{16}$

$f = 1\frac{1}{16}$

Rješenje:

1.125

$1\frac{19}{44}$ | $\frac{11}{14}$

$1\frac{5}{16}$ | $\frac{11}{12}$ | $1\frac{1}{6}$

$1\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$

Za svaki od brojeva *a, b, c, d, e, f* učenik dobiva po 1 BOD.

…………………………………………..…………………………...….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan rezultat priznati bilo da je napisan kao mješoviti broj, razlomak ili decimalni broj. Ako učenik neki od brojeva pogrešno izračuna, u nastavku rješenja pri bodovanju treba slijediti grešku.

4. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, $a \leq b$.

Površina pravokutnog trokuta iznosi $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Uvrstimo zadanu površinu:

$24 = \frac{a \cdot b}{2} \;/\cdot 2$

$a \cdot b = 48$ 1 BOD

Sva moguća rješenja su dana u tablici:

a (cm)	1	2	3	4	6
b (cm)	48	24	16	12	8
	1 BOD	1 BOD	1 BOD	1 BOD	1 BOD

5 BODOVA

……………………………………………..………………………..….….... UKUPNO 6 BODOVA

5. Antea ima cikluse odmora i rada u ukupnom trajanju od 4 dana, a Barbara u ukupnom trajanju od 10 dana.

Dakle, nakon proteklih 20 dana, njihovi ciklusi rada i odmora se ponavljaju na isti način.

2 BODA

U prvih 20 dana od početka rada na svojim novim poslovima, Antea će se odmarati četvrti, osmi, dvanaesti, šesnaesti i dvadeseti dan, brojeći od početka, a Barbara osmi, deveti, deseti, osamnaesti, devetnaesti i dvadeseti dan, brojeći od početka.

To znači da će u prvih 20 dana one imati dva zajednička dana odmora. 2 BODA

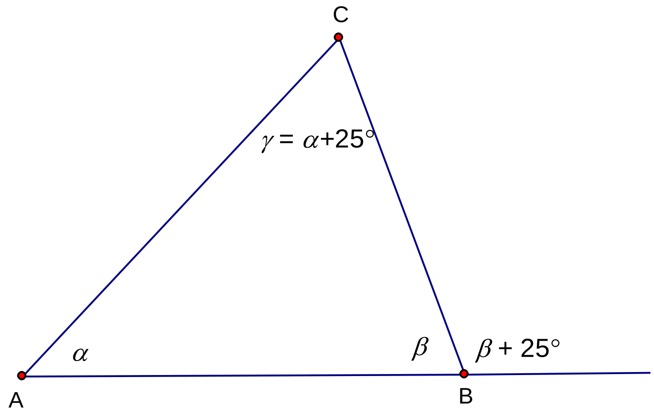
U prvih 1000 dana rada, bit će ukupno 50 takvih ciklusa od 20 dana, što znači da će ukupno imati $50 \cdot 2 = 100$ zajedničkih dana odmora. 2 BODA

……………………………………………..………………………..….….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Navedeni parcijalni bodovi služe kao pomoć pri bodovanju učenika koji nije u potpunosti ili nije točno riješio zadatak. Ukoliko je učenik riješio zadatak, koristeći svu potrebnu argumentaciju, bez obzira što možda nije naveo neku od izjava za koje je napisano da se boduju, treba biti ocijenjen sa 6 BODOVA.

6. 1. slučaj (5 BODOVA):

Skica:



Neka je vanjski kut trokuta npr. β_1 veći pa vrijedi da je $\beta_1 = \beta + 25°$. 1 BOD

Dalje vrijedi da je

$\beta + \beta_1 = 180°$

$\beta + \beta + 25° = 180°$

$2 \cdot \beta = 180° - 25°$

$\beta = 155° : 2$

$\beta = 77°30'$ 1 BOD

Za preostala dva unutarnja kuta vrijedi sljedeća jednakost:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$\alpha+77°30'+\alpha+25°=180°$

$2\cdot\alpha=180°-(77°30'+25°)$

$2\cdot\alpha=179°60'-102°30'$

$2\cdot\alpha=77°30'$

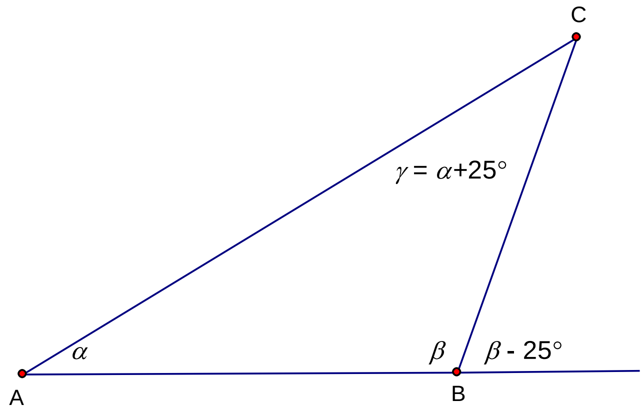
$\alpha=76°90':2$

$\alpha=38°45'$ 2 BODA

$\gamma=\alpha+25°=38°45'+25°=63°45'$ 1 BOD

2. slučaj (5 BODOVA):

Skica:



Neka je vanjski kut trokuta npr. β_1 manji pa vrijedi da je $\beta_1=\beta-25°$. 1 BOD

Dalje vrijedi da je

$\beta+\beta_1=180°$

$\beta+\beta-25°=180°$

$2\cdot\beta=180°+25°$

$\beta=205°:2$

$\beta=102°30'$ 1 BOD

Za preostala dva unutarnja kuta vrijedi sljedeća jednakost:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$\alpha+102°30'+\alpha+25°=180°$

$2\cdot\alpha=180°-(102°30'+25°)$

$2\cdot\alpha=179°60'-127°30'$

$2\cdot\alpha=52°30'$

$\alpha=52°30':2$

$\alpha=26°15'$ 2 BODA

$\gamma=\alpha+25°=26°15'+25°=51°15'$ 1 BOD

……………………………………………………………..……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bodovati na isti način ako učenik zapisuje veličine kutova samo u stupnjevima, a ne pretvara ih u stupnjeve i kutne minute (npr. β = 77.5º umjesto β = 77º30').

7. a) Svi trokuti koji se slažu na opisani način su jednakokračni trokuti kojima je krak za 2 cm kraći od osnovice.

Ako označimo duljinu osnovica s a, a duljine krakova s b zbog nejednakosti trokuta mora vrijediti $2b > a$. 1 BOD

Dakle, imamo sljedeće trokute:

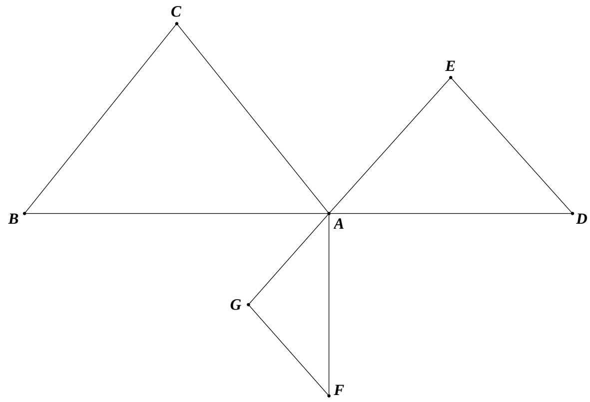
a	b	$2b > a$
10 cm	8 cm	DA
8 cm	6 cm	DA
6 cm	4 cm	DA
4 cm	2 cm	NE

(tablica) 1 BOD

Na opisani način mogu se složiti najviše tri takva trokuta. 1 BOD

b) Lik koji dobijemo slaganjem žice sastoji se od tri jednakokračna trokuta s jednim zajedničkim vrhom.

Nacrtajmo jedan takav lik:



Rub tog lika sastoji se od jedne stranice duljine 10 cm, tri stranice duljine 8 cm, tri stranice duljine 6 cm i dvije stranice duljine 4 cm. 1 BOD

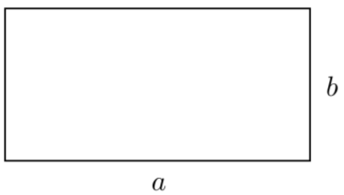
Dakle, zbroj opsega svih složenih trokuta je:

$o = 10 + 3 \cdot (8 + 6) + 2 \cdot 4$ 1 BOD

$o = 60$ cm 1 BOD

c) Treba izračunati površinu pravokutnika čije se stranice razlikuju za 12 cm, a opseg je jednak duljini žice.

$o = 2(a + b)$



Kako je opseg jednak 60 cm, onda je zbroj duljina susjednih stranica tog pravokutnika jednak $a + b = 30$ cm. 1 BOD

Ako je $a - b = 12$ cm, onda je $a = b + 12$, pa vrijedi:

$b + 12 + b = 30$. 1 BOD

Stoga je $b = 9$ cm, $a = 21$ cm. 1 BOD

Površina tog pravokutnika je:

$P = 21 \cdot 9 = 189$ cm^2. 1 BOD

……………………………………………………………..………... UKUPNO 10 BODOVA