

Aritmetički niz

Općenito o nizovima

Definicija aritmetičkog niza

Opći član aritmetičkog niza

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza



2.

1. Općenito o nizovima

Brojanje, odnosno nizanje brojeva, predstavlja osnov aritmetike i algebre. Nižemo li brojeve koji pripadaju skupu prirodnih brojeva \mathbf{N} , dobivamo **niz ili slijed prirodnih brojeva**

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

Osim brojeva možemo promatrati i nizove raznih drugih objekata: nizove knjiga na polici u knjižnici, nizove kuća s lijeve ili desne strane ulice, umjetnička djela izložena u galerijama u skladu s nekim kriterijem i poredana u određenom slijedu. Pojam niza izuzetno je značajan i u ekonomiji: u nekoj tvornici možemo govoriti o nizu operacija koje valja činiti (određenim redom) pri proizvodnji nekog proizvoda, u poljodjelstvu možemo govoriti o nizu operacija (aktivnosti) koje se moraju izvršiti određenim slijedom želimo li ubrati plodove tih aktivnosti.

Uočimo da za sve navedene nizove možemo precizno reći što im je prvi (početni) član. Također možemo reći koji član (ako takav postoji) dolazi nakon prvoga, koji član (ako takav postoji) slijedi nakon drugoga i tako dalje.

Primjer 1

Koje sve nizove možemo dobiti koristeći se prvim trima parnim brojevima i to svakim točno jednom?

Rješenje

Svi članovi svakog traženog niza pripadaju skupu $A = \{2, 4, 6\}$. Riječ je o nizovima:

$$\begin{array}{ccc} 2, 4, 6 & 2, 6, 4 & 4, 2, 6 \\ 4, 6, 2 & 6, 2, 4 & 6, 4, 2, \end{array}$$

kojima je zajednička pripadnost njihovih članova skupu A , a razlikuju se u poretku tih članova. U prvom je nizu prvi član broj 2, drugi član broj 4, a treći član broj 6, što simbolički možemo pisati ovako:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6,$$

odnosno

$$a(1) = 2, a(2) = 4, a(3) = 6.$$

Dakle, navedeni niz možemo shvatiti kao pridruživanje koje brojevima iz konačnog podskupa $\{1, 2, 3\}$ skupa prirodnih brojeva pridružuje elemente skupa A . Budući da je svaki član razmatranog niza funkcija svog rednog broja (indeksa), niz brojeva 2, 4, 6 možemo smatrati vrijednostima funkcije, a kojoj je domena skup $\{1, 2, 3\}$.

U drugom nizu prvi član je broj 2, drugi član je broj 6, a treći član je broj 4, što simbolički pišemo:

$$a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 4, \quad \text{odnosno} \quad a(1) = 2, a(2) = 6, a(3) = 4.$$

Za vježbu napiši preostala 4 niza.

Konačnim nizom u skupu A nazivamo funkciju

$$a: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A,$$

gdje je A proizvoljan skup. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$, riječ je o konačnom nizu realnih brojeva od k elemenata:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k,$$

gdje je $a_n = a(n)$, $n \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pritom je a_n **opći član niza**.

Primjer 2

Na polici su poredani sljedeći udžbenici: Matematika, Čitanka, Povijest, Gospodarstvo, Zemljopis, Engleski, Informatika.

Uvedemo li oznake:

$$\begin{array}{lll} a_1 = \text{Matematika}, & a_2 = \text{Čitanka}, & a_3 = \text{Povijest}, \\ a_4 = \text{Gospodarstvo}, & a_5 = \text{Zemljopis}, & a_6 = \text{Engleski}, \end{array}$$

možemo reći da se na polici nalazi niz udžbenika $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Ovaj niz ima $k = 6$ elemenata, a oni pripadaju skupu

$$A = \{\text{Matematika}, \text{Čitanka}, \text{Gospodarstvo}, \text{Povijest}, \text{Zemljopis}, \text{Engleski}\}.$$

Nije nužno da budu zadani svi članovi niza da bismo smatrali niz poznatim. Često se niz zadaje pomoću općeg člana.

Primjer 3

Zadan je konačan niz realnih brojeva općim članom $a_n = (-1)^n \cdot 2$, $n \leq 5$. Napišimo njegove članove.

Rješenje

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 2 = -2$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot 2 = -2$$

$$a_4 = (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

$$a_5 = (-1)^5 \cdot 2 = -2,$$

pa je riječ o nizu: $-2, 2, -2, 2, -2$.

Beskonačnim nizom u skupu A nazivamo funkciju

$$a : \mathbf{N} \rightarrow A,$$

gdje je \mathbf{N} skup prirodnih brojeva, a A proizvoljan skup. Ako je $A \subseteq \mathbf{R}$, riječ je o beskonačnom nizu realnih brojeva ili, kraće, o nizu realnih brojeva.

U nastavku, ako drugačije ne istaknemo, pod pojmom niza podrazumijevat ćemo beskonačni niz realnih brojeva. Smatrat ćemo da je niz zadan ako je zadan njegov opći član a_n .

Primjer 4

Napišimo prvih 5 članova niza zadanog općim članom $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$.

Rješenje

Nalazimo da je

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 2^1 = -2$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4$$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot 2^3 = -8$$

$$a_4 = (-1)^4 \cdot 2^4 = 16$$

$$a_5 = (-1)^5 \cdot 2^5 = -32.$$

Niz realnih brojeva može se, osim općim članom, definirati i **rekurzivnom formulom**. To znači da je svaki član niza (osim prvoga, kojeg moramo zadati) funkcija prethodnog člana.

Primjer 5

Niz realnih brojeva iz primjera 4 možemo zadati rekurzivnom formulom na sljedeći način:

$$a_{n+1} = (-2) \cdot a_n, \text{ pri čemu je } a_1 = -2.$$

Napišimo prvih pet članova.

Rješenje

Imamo, kao i u primjeru 4:

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = (-2) \cdot a_1 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$a_3 = (-2) \cdot a_2 = (-2) \cdot 4 = -8$$

$$a_4 = (-2) \cdot a_3 = (-2) \cdot (-8) = 16$$

$$a_5 = (-2) \cdot a_4 = (-2) \cdot 16 = -32.$$

Nizovi se mogu grafički predočiti na brojevnom pravcu.

Primjer 6

Predočimo na brojevnom pravcu niz realnih brojeva zadan općim članom

$$a_n = 2 \cdot n - 3, n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje

Uočimo da je

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

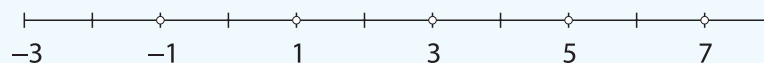
$$a_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

.....

Na brojevnom pravcu sada treba istaknuti točke kojima su pridruženi brojevi $-1, 1, 3, 5, 7, \dots$ kao što je prikazano na slici 1.



slika 1.

2. Definicija aritmetičkog niza

Promotrimo niz prirodnih brojeva:

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots, n, \dots$$

Svaki član navedenog niza (osim prvoga) dobivamo tako da prethodnom članu niza dodamo broj 1. Ili, drugim riječima, razlika između ma kojeg člana promatranog niza (izuzev prvoga) i njemu prethodnog konstantna je i iznosi 1. Slično vrijedi i za niz čiji članovi su elementi skupa neparnih brojeva:

$$1, 3, 5, 7, 9 \dots, 2n - 1, \dots$$

Naravno, svaki član navedenog niza (osim prvoga) dobivamo tako da prethodnom članu niza dodamo broj 2. Drugim riječima, razlika između ma kojeg člana navedenog niza (izuzev prvoga) i njemu prethodnog konstantna je i iznosi 2.

Provedeno razmatranje možemo sada poopćiti i definirati niz (realnih) brojeva sa svojstvom da svaki član niza (osim prvoga) dobivamo tako da prethodnom članu dodamo neki broj d .

Aritmetički niz (aritmetička progresija) takav je niz brojeva u kojemu je razlika između svakog člana (osim prvoga) i njegova prethodnika konstantna. Tu konstantnu razliku označavamo d i nazivamo **razlikom (diferencijom) aritmetičkog niza**. Simbolički to pišemo ovako:

$$a_k - a_{k-1} = d \text{ za sve } k \in \{2, 3, \dots\}.$$

Aritmetički je niz strogo rastući ako je konstantna razlika $d > 0$. On je strogo padajući ako je $d < 0$, a stalan ili stacionaran (konstantan) za $d = 0$.

Primjer 7

Treba utvrditi koji je od zadanih nizova aritmetički i za njega ustanoviti je li rastući, padajući ili stacionaran:

a) $1, 3, 6, 10\dots,$

b) $-3, -2, -1, 0\dots,$

c) $0, -1, -2, -3\dots,$

d) $-11, -11, -11, -11\dots,$

e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots,$

f) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3} \dots$

Rješenje

- a) Budući da je $3 - 1 \neq 6 - 3$, tj. razlika drugog i prvog člana niza različita je od razlike trećeg i drugog člana niza, pa niz nije aritmetički.
- b) Kako je: $-2 - (-3) = -1 - (-2) = 0 - (-1) = 1$, tj. razlika proizvoljnih susjednih članova niza konstantna je, pa je riječ o aritmetičkom nizu s razlikom $d = 1$. Budući da je $d > 0$, niz je rastući.
- c) I ovaj je niz aritmetički, jer je $d = -1 - 0 = -2 - (-1) = -3 - (-2) = -1$. Niz je padajući zbog toga što je $d < 0$.
- d) Niz $-11, -11, -11, -11, \dots$ je stacionaran niz, dakle, aritmetički niz za koji je $d = 0$.
- e) Budući da je $\frac{1}{2} - 1 \neq -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, nije riječ o aritmetičkom nizu.
- f) Riječ je o rastućem aritmetičkom nizu s razlikom

$$d = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} > 0.$$

3. Opći član aritmetičkog niza

Iz definicije aritmetičkog niza

$$a_k - a_{k-1} = d,$$

odnosno

$$a_k = a_{k-1} + d, \quad k \in \{2, 3, \dots\}$$

slijedi

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d,$$

...

Uočavamo da **prvom članu niza** moramo dodati $(n - 1)$ puta razliku niza d da bismo dobili n -ti ili opći član niza. Dakle, **opći član a_n aritmetičkog niza**, uz pretpostavku da su poznati prvi član niza a_1 i diferencija d , može se izraziti formulom

$$a_n = a_1 + (n - 1) d.$$

Aritmetički niz dobio je naziv po tome što je svaki njegov član, osim prvoga i posljednjega (ako je riječ o konačnom nizu), aritmetička sredina dvaju njegovih susjednih članova. Doista, ako je $k > 1$, iz formule za opći član aritmetičkog niza slijedi da je

$$a_{k-1} = a_1 + (k - 2) d,$$

odnosno

$$a_{k+1} = a_1 + k d,$$

pa je **aritmetička sredina** tih dvaju članova aritmetičkog niza

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a_1 + (k-2)d + a_1 + kd}{2} = \frac{2a_1 + 2(k-1)d}{2} = a_1 + (k-1)d = a_k$$

što smo i tvrdili.

Primjer 8

Odredimo trideseti član aritmetičkog niza

$$13, 10, 7, \dots$$

Rješenje

Uočimo da je prvi član niza $a_1 = 13$, a razlika $d = -3$, što uvršteno u formulu za opći član aritmetičkog niza daje trideseti član ($n = 30$):

$$a_{30} = 13 + (30 - 1) \cdot (-3) = -74.$$

Primjer 9

Odredimo opći član aritmetičkog niza

$$23, 18, 13, \dots$$

Rješenje

Riječ je o aritmetičkom nizu kod kojega je prvi član $a_1 = 23$, a razlika $d = -5$. Koristeći se formulom za opći član aritmetičkog niza, nalazimo

$$a_n = 23 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 28.$$

Primjer 10

Je li niz zadan rekursivnom formulom

$$a_n = a_{n-1} + 2, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\},$$

čiji prvi član je $a_1 = 1$, aritmetički?

Rješenje

Iz rekursivne formule slijedi

$$a_n - a_{n-1} = 2 \text{ za sve } n \in \{2, 3, 4, \dots\},$$

što znači da je riječ o aritmetičkom nizu s razlikom $d = 2$ i prvim članom $a_1 = 1$.

4.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza $a_1, a_2 \dots$ označimo sa s_n

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ako je diferencija tog niza d , slijedi:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d].$$

Zbroj članova polaznog niza možemo napisati u obratnom poretku:

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1.$$

Ova jednakost predstavlja zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1,$$

kod kojeg je prvi član a_n a diferencija $-d$, pa je

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n - 1)d].$$

Zbrojimo li jednakosti:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d]$$

i

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n - 1)d],$$

dobivamo:

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

što znači da je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dobije se tako da se polovica zbroja prvog i posljednjeg člana pomnoži brojem članova niza.

Navedeno pravilo znao je već krajem 18. stoljeća, kad je imao samo devet godina, znameniti njemački matematičar J. F. Gauss. U osnovnoj školi, želeći u miru napisati pismo, Gaussov je učitelj zadao djeci da zbroje brojeve od 1 do 60. Svaki učenik

trebao je dostaviti učitelju rješenje zadatka na pločici. Znatno prije ostalih učinio je to mali Gauss. Predao je učitelju svoju pločicu na kojoj je pisao samo rezultat: 1830. Naime, on je ustanovio da je zbroj prvog i posljednjeg broja, drugog i pretposljednog i tako dalje uvijek jednak:

$$1 + 60 = 2 + 59 = \dots = 30 + 31 = 61.$$

Budući da je imao ukupno 30 takvih parova, zaključio je da je traženi zbroj $30 \cdot 61 = 1830$.

Primjer 11

Odredimo zbroj prvih 200 parnih brojeva.

Rješenje

Kako je $a_1 = 2$, $d = 2$, a $a_{200} = 2 + (200 - 1) \cdot 2 = 400$, traženi zbroj je

$$s_{200} = \frac{200}{2} (1 + 400) = 40\,100.$$

Kako za opći član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

zbroj prvih n članova aritmetičkog niza može izračunati i koristeći se formulom

$$s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d].$$

Zadaci

1. Odredi diferenciju aritmetičkog niza te treći, četvrti i peti član niza.

a) $1, 5, \dots$,

b) $1, -5, \dots$,

c) $-2, 2, \dots$,

d) $5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, \dots$,

e) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \dots$,

f) x, y, \dots ,

g) $x + 2y, 2x + y, \dots$,

h) $x - y, x + y, \dots$,

i) $x + 5, 5x, \dots$.

2. Napiši prvih 5 članova niza i utvrdi je li niz aritmetički:

a) $a_n = 2n - 1$,

b) $a_n = 3n + 1$,

c) $a_n = 2 - n$,

d) $a_n = n^2 - n + 1$,

e) $a_n = n + \frac{2}{n}$,

f) $a_n = \frac{2n-3}{n+2}$.

3. Napiši prvih 5 članova aritmetičkog niza:

a) $a_1 = 15, d = 3$,

b) $a_1 = 15, d = -3$,

c) $a_1 = -15, d = 3$,

d) $a_1 = -15, d = -3$,

e) $a_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}$,

f) $a_1 = x, d = 2$,

g) $a_1 = 4a, d = 1 - 3a$,

h) $a_1 = \frac{a}{b}, d = \frac{b}{a}$.

4. Odredi opći (n -ti) član aritmetičkih nizova:

a) $a_1 = 3, d = 3$,

b) $a_1 = -3, d = 13$,

c) $a_1 = 3.3, d = 1.3$,

d) $a_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}$,

e) $a_1 = -3, d = \frac{3}{2}$,

f) $a_1 = x, d = 2$,

g) $a_1 = x + y, d = 2(x - y)$,

h) $a_1 = 4a, d = 1 - 3a$,

i) $a_1 = \frac{a}{b}, d = \frac{b}{a}$.

5. Grafički predoči prvih 5 članova aritmetičkog niza:

a) $a_1 = 1, d = 1$,

b) $a_1 = -3, d = 2$,

c) $a_1 = 3.3, d = 1.3$,

d) $a_1 = \frac{3}{2}, d = -\frac{3}{2}$,

e) $a_1 = -3, d = \frac{3}{2}$,

f) $a_1 = 0.5, d = 1.5$,

g) $a_1 = 5.6, d = -0.8$,

h) $a_1 = 8, d = 8$,

i) $a_1 = 1, a_3 = 5$.

6. Je li b član zadanog aritmetičkog niza? Ako jest, na kojem se mjestu u nizu nalazi?

a) $5, 8, 11, \dots, b = 305$,

b) $5, -2, -9, \dots, b = -345$,

c) $a_n = 4n - 10, b = 30$,

d) $a_n = 4 - 10n, b = -477$,

e) $a_1 = 5, d = 8, b = 85$,

f) $a_1 = -5, d = -0.4, b = -9$.

7. Na kojem se mjestu u aritmetičkom nizu:

a) 1996, 1992, ... nalazi član 1896, a na kojem član -780 ?

b) $15x - 20y$, $13x - 17y$, ... nalazi član $10y - 5x$?

8. Kako glasi aritmetički niz ako je:

a) $a_3 = 1, d = 1,$

b) $a_{221} = -3, d = 2,$

c) $a_{101} = 3.3, d = 1.3,$

d) $a_{12} = \frac{3}{2}, d = -\frac{3}{2},$

e) $a_{134} = -3, d = \frac{3}{2},$

f) $a_{15} = 0.5, d = 1.5?$

9. Odredi prvi član i diferenciju aritmetičkog niza ako je:

a) $a_3 = 1, a_4 = 3,$

b) $a_{22} = -3, a_{23} = 2,$

c) $a_{10} = 3.3, a_{12} = 1.3,$

d) $a_{15} = \frac{9}{2}, a_3 = -\frac{3}{2},$

e) $a_{41} = -75, a_{14} = -21,$

f) $a_5 = 0.5, a_{10} = 2.$

10. Peti je član aritmetičkog niza -19 , a sedmi -29 . Odredi sedamnaesti član tog niza.

11. Odredi 101. član aritmetičkog niza ako je:

a) $a_9 + a_6 = 97, a_9 - a_2 = 49,$

b) $a_4 + a_5 = 29, a_{11} - a_5 = 30,$

c) $3a_4 + 2a_6 = 81, a_{10} + 2a_1 = 39,$

d) $2a_4 + a_6 = -41, a_1 - 4a_5 = 16,$

e) $a_{11} \cdot a_6 = 0, a_1 - a_2 = 2,$

f) $a_7 : a_2 = 2, a_{27} : a_{12} = 2.$

12. Odredi opći član aritmetičkog niza ako je:

a) $a_7 + a_5 = 22, a_7 - a_5 = 4,$

b) $a_4 + a_5 + a_6 = -21, a_{10} - a_5 - a_1 = -11,$

c) $3a_4 + 4a_3 = 36, a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 28,$

d) $a_4^2 + a_6^2 = 106, a_4 - a_6 = -4,$

e) $a_1 \cdot a_6 = -14, a_1 - a_6 = 15,$

f) $a_7^2 - a_7 = 6, a_{14} : a_5 = -8.$

13. Odredi aritmetički niz za koji vrijedi:

a) $a_3 + a_7 = 12, a_4 \cdot a_5 = 360,$

b) $a_4 + a_7 = 38, a_4 \cdot a_7 = 325,$

c) $a_3 + a_9 = 10, a_1 \cdot a_4 = 45,$

d) $a_3 : a_9 = 3 : 7, a_1 \cdot a_8 = 95,$

e) $a_2 : a_5 = 5 : 11, a_3 \cdot a_6 = 364,$

f) $a_1^2 + a_{10}^2 = 1370, a_5^2 + a_6^2 = 730.$

14. Odredi koja tri uzastopna člana aritmetičkog niza 1, 5, 9, ... zbrojena daju 147.

15. U aritmetičkom nizu od 13 članova srednji je član 10, a umnožak šestog i posljednjeg člana 100. Odredi prvi član i razliku tog niza.

16. Zbroj prvih triju članova aritmetičkog niza je 27, a zbroj njihovih kvadrata je 275. Koji je to niz?

17. Tri broja čine aritmetički niz s razlikom 1. Ako je njihov zbroj jednak njihovom umnošku, koji su to brojevi?

18. Odredi prvi negativni član aritmetičkog niza

a) 111, 108, 105, ... ,

b) 15, 12, 9,

19. Počevši od kojeg člana su svi idući članovi niza:

a) 9.6, 9.3, ... manji od 6?

b) 9.6, 9.8, ... veći od 2004?

20. Odredi prvi pozitivni član aritmetičkog niza

a) - 21, - 16, - 11, ... ,

b) - 115, - 112, - 109,

21. Odredi opći član aritmetičkog niza ako su mu zadani neposredni prethodnik i neposredni sljedbenik.

a) $\frac{x^2}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2},$

b) $\frac{2x^2}{x-y}, \frac{-2y^2}{x-y},$

c) $\frac{a^2-2a}{a-1}, \frac{1}{a-1},$

d) $\frac{a^2-3ab}{(a-b)^2}, \frac{ab+b^2}{(a-b)^2},$

e) $\log x^2, \log \frac{1}{x^2},$

f) $\log_2 4x, \log_2 \frac{1}{x}.$

22. Odredi $x \in \mathbf{R}$ tako da zadani izrazi čine uzastopni članove aritmetičkog niza:

a) $5x + 1, 12x - 7, 7x + 9,$

b) $x + 13, 4x, 3x - 9,$

c) $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{x-2},$

d) $\frac{3x+4}{2x+1}, \frac{x+1}{x}, 1,$

e) $\sqrt{x-1}, \sqrt{x}, \sqrt{5-x},$

f) $\sqrt{x-1}, 1, \sqrt{x+1}.$

23. Provjeri je li niz aritmetički. Ako jest, odredi mu deveti i opći član:

a) $\log 7, \log 14, \log 28, \dots,$

b) $\log a, \log a^2, \log a^3, \dots,$

c) $\log_2 5, \log_2 5a, \log_2 5a^2, \dots$

24. Koliko ima prirodnih brojeva između 100 i 1 000 koji su

a) parni,

b) neparni?

25. Koliko ima prirodnih brojeva između 100 i 1000 djeljivih sa:

a) 7,

b) 9,

c) 11?

26. Odredi zbroj prvih 10 članova aritmetičkog niza:

a) $a_1 = 3, d = 3,$

b) $a_1 = -3, d = 13,$

c) $a_1 = 3.3, d = 1.3,$

d) $a_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2},$

e) $a_1 = x + y, d = x - y,$

f) $a_1 = 4a, d = 1 - 3a.$

27. Izračunaj a_1 i d ako je zadano:

a) $a_2 + a_4 + a_6 = 12$, $a_1 \cdot a_{12} = 12$,

c) $s_2 = 12$, $s_5 = 60$,

b) $a_6 - a_2 = 12$, $a_{18} + a_{12} = 90$,

d) $a_2 + a_4 - a_6 = 0$, $s_2 \cdot s_3 = 18$.

28. Izračunaj nepoznatu veličinu:

a) $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 12$, $a_n = ?$ $s_n = ?$,

b) $a_1 = 12$, $d = -4$, $n = ?$, $a_n = -100$ $s_n = ?$,

c) $a_1 = 1$, $d = ?$, $n = 30$, $a_n = 291$ $s_n = ?$,

d) $a_1 = ?$, $d = 3$, $n = 21$, $a_n = ?$ $s_n = 1470$,

e) $a_1 = ?$, $d = ?$, $n = 14$, $a_n = 27$ $s_n = 196$.

29. Ako je u aritmetičkom nizu $a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{17} = 15$, odredi s_{18} .

30. Riješi jednadžbu

$$(x - 1) + (2x - 4) + (3x - 7) + \dots + (16x - 46) = 32.$$

31. Riješi jednadžbu

$$(x - 1) + (3x - 6) + (5x - 11) + \dots + (19x - 46) = 165.$$

32. Između brojeva

a) 9 i 321 umetni 38 brojeva

b) 62 i - 22 umetni 6 brojeva

c) između $67\frac{7}{12}$ i $4\frac{1}{4}$ umetni 18 brojeva

tako da s navedenim brojevima čine aritmetički niz.

33. Između brojeva $\log 27.41 = 1.43791$ i $\log 27.42 = 1.43807$ umetni 9 brojeva tako da s navedenim brojevima čine aritmetički niz, a zatim odredi sedmi član tog niza.

34. Proizvodnja nekog poduzeća iznosila je 57 000 tona u 1997. godini. Ako je planom predviđeno da se proizvodnja poveća svake godine za 3000 tona, kolika će biti proizvodnja u 2004. godini? Kolika je ukupna proizvodnja od 1997. do 2004. godine?

35. Godine 1998. ukupni prihod neke tvrtke iznosio je 2 500 000 kn. Financijskim planom predviđeno je u svakoj godini povećanje ukupnog prihoda za 500 000 kn. U kojoj će se godini realizirati ukupni prihod 5 000 000 kn?

- 36.** Nagradu od 110 000 kn dijele osobe A, B, C i D tako da B dobije 5000 kn više nego A , C 5000 kn više nego B , a D 5000 kn više nego C ? Koliki je iznos dobila svaka osoba?
- 37.** Izračunaj godišnje amortizacijske iznose za stroj nabavne vrijednosti
- 1 050 000 kn ako se oni ravnomjerno smanjuju
 - 950 000 kn ako se oni ravnomjerno povećavaju
- svake godine za 10 000 kn, a ekonomski je vijek trajanja stroja 10 godina.
- 38.** Ako netko 1. siječnja u banku uloži 1000 kn i početkom svakog idućeg mjeseca tijekom te godine uloži po 300 kn više nego što je uložio prethodni mjesec, kolikim iznosom će raspolagati na kraju razmatrane godine ne računajući kamate?
- 39.** Kako treba podijeliti iznos 18 000 kn ako je prva osoba dobila 3000 kn, a svaka sljedeća po 1000 kn više nego prethodna?
- 40.** Na nekom će natjecanju biti podijeljeno ukupno 15 nagrada. Uz prvu nagradu dodjeljuje se i novčani iznos 5000 kn, a uz svaku sljedeću novčani iznos za 250 kn manji nego uz prethodnu nagradu. Koliki iznos se dodjeljuje uz petnaestu nagradu? Koliki je ukupni fond za nagrade?
- 41.** Predmet bačen sa stijene padat će u prvoj sekundi 16 metara, u drugoj 26 metara, 36 metara u trećoj i tako dalje povećavajući duljinu puta za 10 metra u odnosu na put u prethodnoj sekundi. Koliki put predmet prevali za 7 sekundi?
- 42.** U parketu kazališta u prvom redu je 27 stolaca, u drugom 29 i u svakom idućem od ukupno 10 redova 2 su stolca više nego u prethodnom redu. Koliko je stolaca u desetom redu? Koliko je stolaca u parketu?
- 43.** Oporavak invalida Domovinskog rata zahtijeva, između ostaloga, svakodnevnu šetnju. Ako invalid prvi tjedan oporavka treba svaki dan provesti u šetnji 15 minuta, a svaki idući tjedan 5 minuta dnevno dulje nego prethodni tjedan, u kojem će tjednu oporavka šetati po 60 minuta dnevno? Koliko će ukupno minuta invalid provesti u šetnji ako oporavak traje 20 tjedana?

Rješenja

- $d = 4, a_3 = 9, a_4 = 13, a_5 = 17,$
 - $d = 4, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 14,$
 - $d = \frac{1}{6}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{6}, a_5 = 0,$
 - $d = x - y, 3x, 4x - y, 5x - 2y,$
 - $d = 4x - 5, 9x - 5, 13x - 10, 17x - 15.$
- $d = -6, a_3 = -11, a_4 = -17, a_5 = -23,$
 - $d = -3\frac{1}{6}, a_3 = -\frac{5}{6}, a_4 = -4, a_5 = -7\frac{1}{6},$
 - $d = y - x, a_3 = 2y - x, a_4 = 3y - 2x, a_5 = 4y - 3x,$
 - $d = 2y, a_3 = x + 3y, a_4 = x + 5y, a_5 = x + 7y,$

2. a) 1, 3, 5, 7, 9, niz jest aritmetički,
 c) 1, 0, -1, -2, -3, niz jest aritmetički,
 e) $3, 3, \frac{11}{3}, \frac{9}{2}, \frac{12}{5}$, niz nije aritmetički,
3. a) 15, 18, 21, 24, 27,
 c) -15, -12, -9, -6, -3,
 e) $\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}$;
 g) $4a, 1 + a, 2 - 2a, 3 - 5a, 4 - 8a$,
4. a) $a_n = 3n$,
 d) $a_n = 1.5n$,
 g) $a_n = x(2n - 1) + 2y(1 - n)$,
6. a) 101. član,
 d) nije član niza,
7. a) 1896 je 26. član, a -780 je 695. član,
8. a) -1, 0, 1, ...,
 d) 18, 16.5, 15, ...,
9. a) $a_1 = -3, d = 2$,
 d) $a_1 = -\frac{5}{2}, d = \frac{1}{2}$,
10. $a_{17} = -79$.
11. a) 703,
 d) 468,
12. a) $a_n = 2n - 1$,
 d) $(a_n)_1 = 2n - 3, (a_n)_2 = 2n - 17$,
13. a) $a_1 = 222, d = -54$,
 c) $(a_n)_1 = \frac{15}{2}, d_1 = -\frac{1}{2}$ i $(a_1)_2 = -15, d_2 = 4$,
 e) $(a_n)_1 = -6, d_1 = -4$ i $(a_1)_2 = 6, d_2 = 4$,
14. $a_{12} + a_{13} + a_{14} = 147$.
15. $(a_n)_1 = 10, d_1 = 0$ (dakle, riječ je o stacionarnom nizu) i $(a_n)_2 = -40, d_2 = \frac{25}{3}$.
16. Postoje 2 niza s navedenim svojstvima: 5, 9, 13, ... i 13, 9, 5, ...
17. Tri su niza sa navedenim svojstvima: -1, 0, 1 i -3, -2, -1 i 1, 2, 3.
18. a) tridesetdeveti,
 b) sedmi.
19. a) četrnaesti,
 b) 9974.
20. a) šesti,
 b) četrdeseti.
21. a) $\frac{1}{2}$,
 b) $x + y$,
 c) $\frac{a-1}{2}$,
 d) $\frac{1}{2}$,
 e) 0,
 f) 1.
22. a) 2,
 b) 1,
 c) -1 i 4,
 d) -1 i 2,
 e) 1 i $\frac{9}{5}$,
 f) $\frac{5}{4}$.
23. a) $a_9 = \log 1792, a_n = \log 3.5 + n \log 2$,
 b) $a_9 = 9 \log a, a_n = n \log a$,
 c) $a_9 = \log 25 + 8 \log_2 a, a_n = \log_2 5 + (n - 1) \log_2 a$.
24. a) 449,
 b) 450.
- b) 4, 7, 10, 13, 16, niz jest aritmetički,
 d) 1, 3, 7, 13, 21, niz nije aritmetički,
 f) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1$, niz nije aritmetički.
- b) 15, 12, 9, 6, 3,
 d) -15, -18, -21, -24, -27,
 f) $x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8$,
- h) $\frac{a}{b}, \frac{a^2 + b^2}{ab}, \frac{a^2 + 2b^2}{ab}, \frac{a^2 + 3b^2}{ab}, \frac{a^2 + 4b^2}{ab}$.
- b) $a_n = 13n - 16$,
 c) $a_n = 1.3n + 2$,
 e) $a_n = 1.5n - 4.5$,
 f) $a_n = x + 2(n - 1)$,
- h) $a(7 - 3n) + n - 1$,
 i) $a_n = \frac{a}{b} + (n - 1)\frac{b}{a}$.
- c) 10. član,
 f) 11. član.
- b) $10y - 5x$ je 11. član niza.
 c) -126.7, -125.4, -124.1, ...,
 f) -20.5, -19, -17.5, ...
- b) $a_1 = -108, d = 5$,
 c) $a_1 = 12.3, d = -1$,
 e) $a_1 = 5, d = -2$,
 f) $a_1 = -0.7, d = 0.3$.
- b) 497,
 c) 401,
 e) -190, -180
 f) $104d, d \in \mathbf{R}$.
- b) $a_n = -2n + 3$,
 c) $a_n = -2n + 12$,
 e) $4 - 3n, 17 - 3n$
 f) $3n - 18, 12 - 2n$.
- b) $(a_n)_1 = 37, d_1 = -4, (a_n)_2 = 1, d_2 = 4$,
 d) $(a_n)_1 = 2n - 3, (a_n)_2 = 2n - 17$,
 f) $(a_n)_1 = -37, d_1 = -4, (a_n)_2 = 1, d_2 = -4, (a_n)_3 = -1, d_3 = 4$ i $(a_n)_4 = 37, d_4 = 4$.

